Nombres naturels et ordinaux
Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 juillet 2007

Nous avions exposé, dans l'article de décembre, les paradoxes auxquels pouvait mener une utilisation inconsciente de la notion d'ensemble. En particulier, nous avions été amener à remarquer qu'étant donné une propriété P, former l'ensemble

$$\{x : P\}$$

des 'objets' qui satisfont la propriété P n'est pas toujours légitime. Si, dans tout ensemble donné A, il est bel et bien possible d'isoler les éléments de A qui satisfont la propriété P, on ne peut en général pas former un ensemble avec tous les 'objets' qui satisfont la propriété P, sans savoir à priori où ces objets sont choisis.

Dans la théorie de Zermelo et Fraenkel (abréviée ZF dans la suite), on donne une liste de propriétés P pour lesquelles on admet l'existence de l'ensemble $\{x : P\}$: ce sont les *axiomes* de la théorie ZF.

Nous nous proposons de montrer comment, à partir de ces axiomes, on peut définir la notion de *nombre entier* et celle, plus complexe, de *nombre ordinal*.

1 Les axiomes de la théorie ZF

Dans cette section, nous exposons la liste des axiomes de la théorie ZF, conçue pour légitimer les opérations usuelles sur les ensembles tout en évitant le *paradoxe de Russell*.

Le premier axiome de la théorie ZF affirme l'existence d'un ensemble sans élément : l'*ensemble vide*. On le note généralement $\emptyset$ ou $\{\}$.

On écrira $x \in E$ pour signifier que x est un élément de l'ensemble E. On dira encore que x *appartient* à E. Le *principe d'extensionnalité* constitue le second axiome de la théorie ZF : deux ensembles sont identiques si et seulement s'ils ont les mêmes éléments. Pour signifier que les ensebles x et y sont identiques, on écrira $x = y$.

Étant donné deux ensembles x et y, l'*axiome de la paire* affirme l'existence de l'ensemble $\{x, y\}$ appelé *paire* formée par x et y, et dont les seuls éléments sont x et y. Si x et y sont identiques, on notera $\{x\}$ la paire formée par x et lui-même et on l'appellera le *singleton* formé par x.

L'*axiome de l'union* affirme entre autres l'existence, lorsque x et y sont deux ensembles donnés, de l'ensemble noté $x \cup y$, appelé l'*union* de x et y et défini par

$$x \cup y = \{z : z \in x \text{ ou } z \in y\}.$$

Étant donné deux ensembles x et y, on dira que x est inclus à y si tout élément de x appartient à y. On écrira alors $x \subseteq y$ et on dira aussi que x est un *sous-ensemble* ou une *partie* de y. L'*axiome des parties* affirme alors qu'étant donné un ensemble x, on peut former l'ensemble noté $\mathscr{P}x$ dont les éléments sont les sous-ensembles de x : $\mathscr{P}x$ est appelé l'*ensemble des parties* de x.

La notation $\{x \in A : P\}$ désigne l'ensemble des éléments x de A qui satisfont la propriété P. Étant donné une propriété P, l'existence de l'ensemble $\{x \in A : P\}$ est affirmée par le *schéma de compréhension* qui constitue en fait une liste sans fin d'axiomes : pour chaque propriété P et chaque ensemble A, on affirme l'existence de l'ensemble dont les éléments sont ceux de A qui satisfont la propriété P.

Dans le *schéma de substitution*, on affirme, pour *certaines* propriétés P, l'existence de l'ensemble $\{x : P\}$ des 'objets' satisfaisant la propriété P.

Il est essentiel de remarquer la nuance entre le schéma de *compréhension* et le schéma de *substitution* : dans le schéma de compréhension, on *isole* parmi les éléments de A ceux qui satisfont la propriété P tandis que dans le schéma de substitution, on s'intéresse à *tous* les 'objets' qui satisfont la propriété P !

Le paradoxe de Russell illustre pourquoi, dans le schéma de substitution, il faut prendre garde à n'autoriser que *cer-*

taines propriétés P (la liste des propriétés admises constitue le schéma de substitution). Nous l'avons déja mentionné dans l'article de décembre, mais il est bon de le rappeler ici.

Remarque (Paradoxe de Russell). Considérons naïvement l'ensemble $A = \{x : x \notin x\}$ des objets qui ne s'auto-appartiennent pas et tâchons de savoir si l'on a $A \in A$ ou $A \notin A$ (à priori, nous devrions avoir l'un ou l'autre). Si on a $A \in A$, alors A ne s'auto-appartient pas (par définition de l'ensemble A) et il vient $A \notin A$. On trouve donc

$$A \in A \quad \text{implique} \quad A \notin A.$$

Si on a, par contre, $A \notin A$, alors A s'auto-appartient et il vient $A \in A$. Dès lors, on trouve

$$A \notin A \quad \text{implique} \quad A \in A.$$

Finalement, on peut écrire

$$A \in A \quad \text{si et seulement si} \quad A \notin A,$$

ce qui est une contradiction.

Il reste encore à mentionner que, dans la théorie ZF, on dispose de l'*axiome de l'infini* qui assure l'existence d'ensembles infinis (nous y reviendrons). L'*axiome de fondement* empêche les formules cycliques du type $x \in x$.

Dans la théorie augmentée ZFC, on admet aussi l'*axiome du choix* qui affirme qu'étant donné un ensemble d'ensembles x, on peut former un nouvel ensemble y en choisissant un élément dans chacun des éléments de x. Malgré qu'il ne contredise aucun des axiomes de la théorie ZF, certains préfèrent n'avoir recours à l'axiome du choix que dans les cas d'absolue nécessité. L'axiome du choix possède en effet des corollaires étonnants, comme le *paradoxe de Banach-Tarski* qui affirme qu'en découpant judicieusement une sphère pleine en un nombre fini de morceaux (très particuliers) et en les recollant avec astuce, on peut former une sphère pleine de rayon double.

2 Nombres naturels

Toute la question à présent est de *construire*, à partir des axiomes de la théorie ZF, les ensembles et opérations utilisés en mathématique.

Le seul ensemble dont nous sommes assurés de l'existence est, au fond, l'ensemble vide $\emptyset$.

Pour construire les nombres naturels, nous prendrons donc la décision d'appeler 0 cet ensemble sans élément :

$$0 = \emptyset.$$

A partir de 0, et utilisant l'axiome de la paire, nous pouvons former le singleton $\{0\}$ qui possède un élément : 0. Nous prenons la convention d'appeler 1 cet ensemble à un élément

$$1 = \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = 0 \cup \{0\}.$$

Continuant de la sorte, nous déciderons de nommer 2 la paire $\{0, 1\}$:

$$2 = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\}.$$

À ce stade, il n'est rien à comprendre d'autre qu'une série de conventions !

De proche en proche, si nous avons défini les ensemble 0,1, 2,. . ., n, nous définirons l'ensemble[1] $n+1$ (appelé *successeur* de n) par la formule

$$\begin{aligned} n+1 &= \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \\ &= \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{n\}, \\ &= n \cup \{n\}. \end{aligned}$$

Si x est un ensemble quelconque, nous pouvons définir son *successeur* Sx par la formule

$$Sx = x \cup \{x\}.$$

Nous venons de voir que l'on a en particulier $S0 = 1, S1 = 2, \ldots, Sn = n+1, \ldots$

L'axiome de l'infini affirme alors l'existence de l'ensemble ω des nombres naturels (souvent noté $\mathbb{N}$) qui est le plus petit ensemble contenant 0 et vérifiant la propriété suivante (dite propriété de *stabilité par passage au successeur*) : si $x \in \omega$, alors son successeur Sx vérifie aussi $Sx \in \omega$.

Il est formidable de remarquer à quel point notre construction est pertinente. Récrivons les égalités

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 1 &= \{0\}, \\ 2 &= \{0, 1\}, \\ 3 &= \{0, 1, 2\}, \\ &\vdots \\ n &= \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

et remarquons qu'à chaque fois, les éléments de n (qui est un ensemble) sont les naturels qu'on a envie de qualifier

[1] À strictement parler, nous n'avons pas défini la somme de deux naturels. La notation $n + 1$ a pour seul but d'éclairer sur la démarche générale de construction des entiers de proche en proche.

de 'plus petits que n' ! Nous aurons rendu l'intuition de l'ordre sur les entiers si nous définissons $m < n$ (lire 'm est strictement plus petit que n') simplement par $m \in n$:

$$m < n \quad \text{si et seulement si} \quad m \in n!$$

Il est intéressant de s'arrêter quelques instants pour réfléchir à la construction précédente. A partir de la notion d'ensemble dont le comportement est décrit exclusivement par les axiomes de la théorie ZF, nous avons réussi à dégager dans ZF l'existence de l'ensemble ω dont les éléments sont appelés *nombres naturels* et se comparent via la relation d'ordre $<$ qui traduit, d'un point de vue formel, l'appartenance ensembliste. Nous avons réussi à traduire la notion intuitive d'entier dans le cadre de la théorie formelle sur laquelle nous souhaitons baser les mathématiques.

3 Ordinaux

La notion de nombre *ordinal* est nettement moins intuitive, mais elle se base sur le même procédé. Nous disposons des ensemble 0,1,2,..., $n, \ldots$et de l'ensemble ω.

Rien ne nous empêche alors de définir les ensembles

$$\begin{array}{rclcl}
\omega+1 & = & S\omega & = & \omega \cup \{\omega\}, \\
\omega+2 & = & S(\omega+1) & = & \omega+1 \cup \{\omega+1\}, \\
\omega+3 & = & S(\omega+2) & = & \omega+2 \cup \{\omega+2\}, \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\omega+(n+1) & = & S(\omega+n) & = & \omega+n \cup \{\omega+n\}, \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

et d'invoquer l'axiome de l'infini pour affirmer l'existence de l'ensemble

$$\omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots\}$$

qui est le plus petit ensemble contenant 0, ω et vérifiant la propriété de stabilité par passage au successeur. En écrivant encore $\alpha < \beta$ pour $\alpha \in \beta$, il vient $n < \omega$ pour chaque naturel n, et $\omega < \omega + 1$, $\omega < \omega + 2$,..., $\omega < \omega \cdot 2$.

De la même façon, on peut construire l'ensemble

$$\omega \cdot 3 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots,$$
$$\omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots, \omega \cdot 2 + n, \ldots\}$$

ainsi que, pour chaque n, l'ensemble $\omega \cdot n$. L'union de tous les *ordinaux* ω,$\omega \cdot 2$,$\omega \cdot 3$,..., $\omega \cdot n$,...sera alors noté ω^2 ou $\omega \cdot \omega$.

En recommençant à nouveau ce processus, on peut former les ordinaux ω^2+1, ω^2+2,...,ω^2+n,...$\omega^2+\omega$,...$\omega^2+\omega \cdot n$, ..., $\omega^2 + \omega \cdot \omega = \omega^2 \cdot 2 \ldots$

Sur les ordinaux, on dispose d'une 'relation de comparaison' : $\alpha < \beta$ si et seulement si $\alpha \in \beta$. Grâce à cet ordre naturel défini sur les ordinaux et au fait que tout ensemble peut être mis en correspondance avec un ordinal (fait qui repose sur l'axiome du choix), on peut transporter sur n'importe quel ensemble x une relation d'ordre qui en fait un ensemble *bien ordonné*.

4 Conclusion

Nous avons voulu montrer comment, dans le cadre d'une théorie axiomatique formelle, on peut arriver à construire des objets dont on a l'intuition. Il s'agit de traduire les propriétés *naïves* qu'on voudrait voir satisfaites, dans le langage de la théorie formelle.

Dans le cas de la construction des entiers naturels, la méthode que nous avons exposée est d'une rare élégance, la notion d'ordre naturelle sur les entiers s'exprimant simplement par l'appartenance.

Les ordinaux, généralisation des entiers naturels, montrent à quel point la théorie ZF est puissante : du monde *dénombrable* des entiers servant à énumérer, on passe au monde dit *transfini*.