L'intégrale pour présenter quelques fonctions usuelles

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 avril 2007

Pour ce numéro d'avril, je propose aux lecteurs de la page scientifique de découvrir comment certaines fonctions usuelles (fonctions trigonométriques et logarithmiques) peuvent être introduites grâce à la notion d'intégrale indéfinie (voir p. ex. le numéro de septembre d'AlmaSoror).

Nous nous excusons à l'avance pour les passages un peu techniques qui sont inhabituels dans cette page scientifique.

1 L'intégrale indéfinie

Rappelons-nous qu'étant donné deux réels $a < b$ et une fonction positive f associant à un nombre réel x le nombre réel positif $f(x)$, l'*intégrale* de f de a à b, notée $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\,dt$ représente l'aire comprise entre la courbe représentative de f dans un système d'axes cartésiens, l'axe des abscisses et les verticales passant par a et b dans ce même système d'axes (voir le numéro de septembre et la figure 1 ci-dessous).

L'*intégrale indéfinie* de f (associée à a) notée F_a dans la suite est alors la fonction associant au nombre réel x la valeur de l'intégrale entre a et x :

$$F_a(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Le théorème fondamental de l'analyse (voir le numéro de septembre) nous assure alors que l'intégrale indéfinie de f peut être obtenue grâce à une primitive de f : si F est une primitive[1] de f sur la droite réelle, alors on a la relation

$$F_a(x) = F(x) - F(a).$$

En particulier, la *dérivée* de la fonction F_a est la fonction f elle-même :

$$\frac{dF_a}{dx}(x) = F_a'(x) = f(x).$$

Nous allons dans la suite nous intéresser à l'intégrale indéfinie de la fonction inverse et d'une fonction irrationnelle.

2 Fonction logarithmique

La présentation la plus courante de la fonction '*logarithme naturel*' (encore appelé *logarithme népérien* ou *logarithme de base* e) consiste à d'abord définir le nombre e et l'exponentielle de base e et à introduire ensuite la fonction logarithme naturel comme la *réciproque* de cette fonction exponentielle.

Nous proposons ici de montrer que l'on peut faire un choix un peu différent (qui est celui de J. Stewart [1]) : présenter le logarithme népérien comme l'*intégrale indéfinie de la fonction inverse*.

La fonction inverse I associe au nombre réel non nul x son inverse, autrement dit

$$I(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

Le graphe de cette fonction est représenté à la figure 2.

Nous définirons alors le *logarithme naturel* du réel positif x, noté $\ln x$, par les formules

$$\ln x = \int_1^x I = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad \text{si } x > 1,$$

$$\ln x = -\int_x^1 I = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt \quad \text{si } 0 < x < 1;$$

et étant entendu que le logarithme naturel de 1 est nul : $\ln 1 = 0$.

[1] La fonction F est une primitive de f sur la droite réelle si l'on a $\frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x)$ pour chaque nombre réel x. Il est à noter que certaines fonctions n'admettent aucune primitive sur la droite réelle.

Le logarithme naturel de $x > 1$ est donc le nombre positif représentant l'aire comprise sous le graphe de la fonction inverse et entre les verticales issues de 1 et x comme indiqué à la figure 3.

Le logarithme naturel de $0 < x < 1$ est quant à lui le nombre négatif dont l'opposé égale l'aire comprise sous le graphe de la fonction inverse et entre les verticales issues de 1 et x comme indiqué à la figure 4. Nous avons représenté à la figure 5 le graphe de $\ln x$ en fonction de x.

Il est intéressant de noter que les propriété habituelles de la fonction logarithme naturel peuvent se déduire dans le cadre exclusif de cette présentation : le théorème fondamental de l'analyse livre en effet immédiatement le fait que la dérivée de la fonction logarithme naturel est la fonction inverse :

$$\frac{d}{dx}\ln x = \ln' x = \frac{1}{x}, x > 0.$$

Pour démontrer la formule habituelle

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \text{ pour } x > 0 \text{ et } y > 0,$$

nous proposons la méthode suivante. Écrivons, par définition (traitons le cas $x > 1$ et $y > 1$, les autres cas sont analogues)

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\, dt.$$

Comme $1 < x < xy$, on peut décomposer l'intégrale précédente en

$$\int_1^{x} \frac{1}{t}\, dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \ln x + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt.$$

En effectuant alors la substitution $t = ux$ dans la dernière intégrale, nous trouvons $dt = x\, du$ et

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{y} \frac{x}{ux}\, du = \int_1^{y} \frac{1}{u}\, du = \ln y,$$

et la formule que nous conjecturions est démontrée.

On peut de même démontrer d'autres formules usuelles à l'aide des propriétés de l'intégrale (le lecteur aura cependant remarqué que travailler dans ce cadre nécessite une certaine maîtrise des techniques d'intégration comme le changement de variables, la propriété d'additivité etc.).

3 Fonctions trigonométriques

Considérons la fonction positive irrationnelle f définie en $-1 < x < 1$ par la formule

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le lecteur habitué au calcul des dérivées reconnaîtra en f la dérivée de la fonction $\arcsin$.

On montre alors qu'étant donné un nombre réel x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, il existe un unique nombre réel $0 \leqslant y \leqslant 1$ vérifiant la relation

$$\int_0^{y} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = x.$$

Ce nombre réel est appelé le *sinus* de x et noté $\sin x$. De même, il existe un unique nombre réel $0 \leqslant z \leqslant 1$ vérifiant la relation

$$\int_z^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = x.$$

Ce nombre réel z est appelé le *cosinus* de x et est noté $\cos x$.

Remarque 1. Dans le cadre que nous proposons, la formule

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

peut d'ailleurs être prise comme définition du nombre π.

Une utilisation habile du théorème fondamental de l'analyse et des propriétés et techniques d'intégration permet alors de déduire les propriétés des fonctions trigonométriques comme le fait que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus :

$$\frac{d}{dx}\sin x = \sin' x = \cos x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

De même, la dérivée de la fonction cosinus est la fonction opposée au sinus :

$$\frac{d}{dx}\cos x = \cos' x = -\sin x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Des règles de dérivation, il est alors aisé de tirer la première formule fondamentale de la trigonométrie :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

En effet, définissons la fonction F sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par la formule

$$F(x) = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

On calcule alors sa dérivée au point $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\cos x \cos' x + 2\sin x \sin' x, \\ &= -2\cos x \sin x + 2\sin x \cos x, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le théorème fondamental de l'analyse entraîne alors l'égalité

$$F(x) - F(0) = \int_0^{x} F'(t)\, dt = \int_0^{x} 0\, dt = 0,$$

et on trouve $F(x) = F(0) = 1$ après s'être convaincu des égalités $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$ qui suivent facilement des définitions données plus haut.

Les habituelles formules d'addition d'arcs peuvent se démontrer de manière analogue (on consultera [2] pour plus de détails).

Conclusion

Si, dans le cas des fonctions trigonométriques, la technicité de la démarche présentée ici excède celle de la démarche habituelle, il s'avère que c'est par une démarche analogue que l'on introduit les célèbres *fonctions elliptiques de Jacobi*, dont A. Wiles s'est servi pour démontrer le théorème de Fermat-Wiles.

Par ailleurs, nombre d'auteurs définissent la notion d'angle entre deux vecteurs (dans des espaces parfois très abstraits : on peut définir une notion d'angle entre deux polynômes, entre deux fonctions continues, entre deux matrices carrées de même ordre, etc.) à partir de la notion de produit scalaire, qui devient alors fondamentale :

$$\cos \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \odot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Dans un tel cadre, il devient alors **indispensable** que l'introduction de la fonction cosinus **précède** l'introduction de la notion d'angle : la vision géométrique ayant recours au cercle trigonométrique disparaît. La solution présentée plus haut est une (des nombreuses) manière(s) d'introduire les fonctions trigonométriques. L'écriture

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

de la fonction sinus comme la somme d'un nombre infini de monômes de degré impair en est une autre (mais demande aussi du travail si l'on veut en déduire les propriétés usuelles de la fonction sinus). On pourra consulter [2] pour un exposé clair et complet de cette présentation des fonctions trigonométriques.

Références

[1] J. Stewart, *Analyse — Concepts et contextes (traduction de l'Anglais par M. Citta-Vanthemsche)*, De Boeck, Bruxelles.

[2] J. Mawhin, *Analyse — Fondements, techniques, évolution* De Boeck, Bruxelles, 1997.

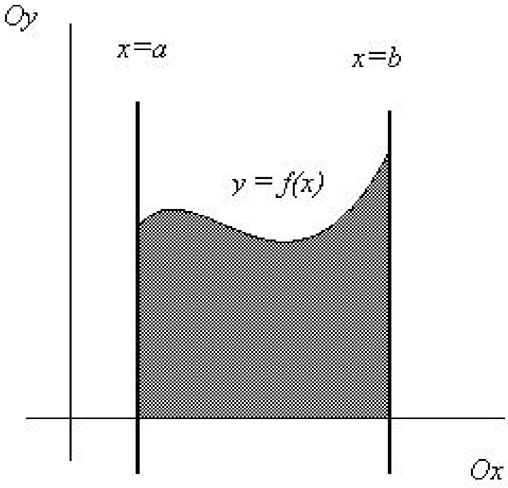

FIG. 1 – L'intégrale de f entre a et b représente l'aire de la région grisée.

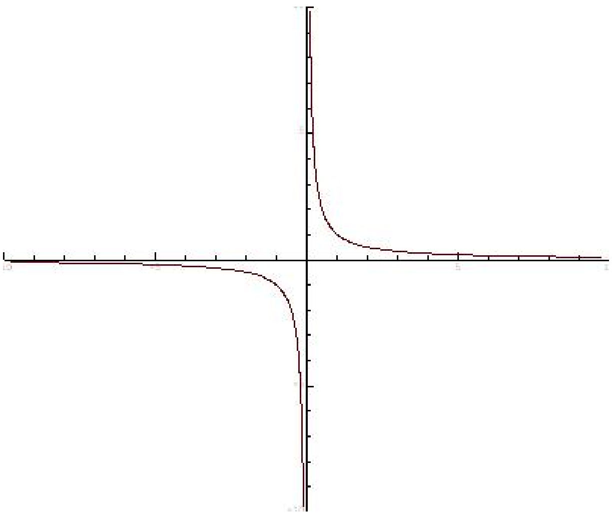

FIG. 2 – La fonction inverse est définie en chaque nombre réel non nul. Son graphe rapporté à un système d'axes cartésiens est une hyperbole.

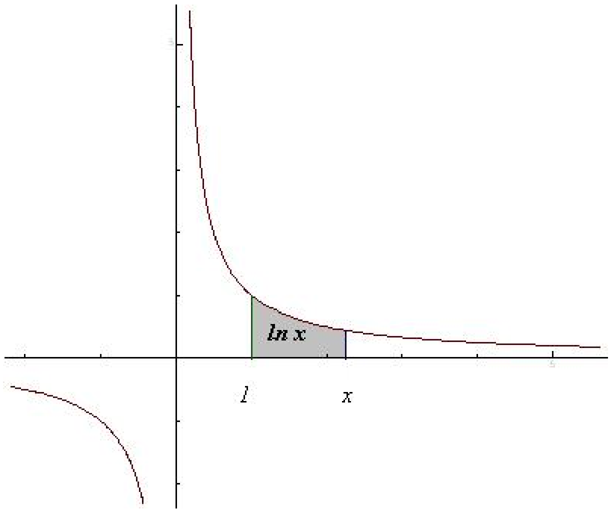

FIG. 3 – Le nombre $\ln x$ représente l'aire de la région grisée ($x > 1$).

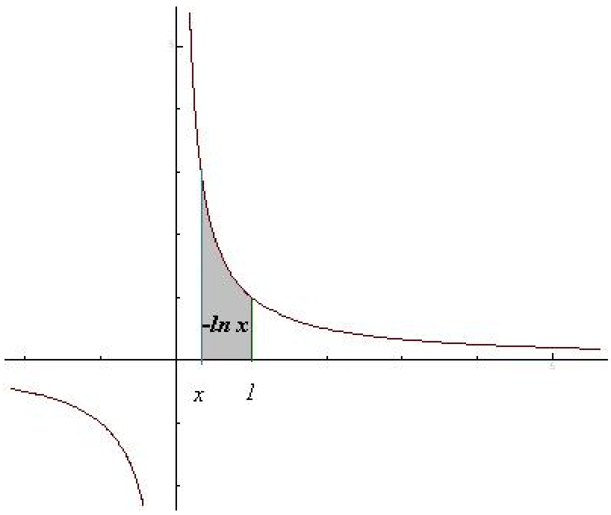

FIG. 4 – Le nombre $-\ln x$ représente l'aire de la région grisée ($x < 1$)

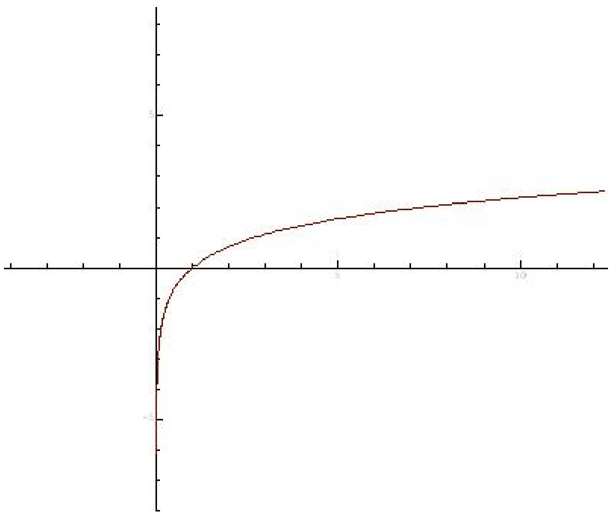

FIG. 5 – Graphe de $\ln x$ en fonction de x