Bolzano et le théorème des valeurs intermédiaires

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 février 2007

Nous avons souvent parlé, dans la page scientifique d'AlmaSoror, de *fonctions continues*. Un résultat fondamental sur les fonctions continues affirme que si une fonction continue sur un intervalle prend des valeurs de signes opposés aux extrémités de cet intervalle, alors elle s'annule nécessairement dans cet intervalle. La première démonstration satisfaisante de ce théorème est due à Bernard Bolzano (1781-1848), dans un article de 1817 (cfr. [1]). De nombreux mathématiciens s'y étaient cependant attardés auparavant, et nous allons montrer en quoi les preuves qu'ils en ont donné sont insatisfaisantes du point de vue scientifique.

1 La notion de fonction continue

Dans la suite, $[a, b]$ désignera l'intervalle joignant les nombres réels a et b[1] et f désignera une fonction associant à chaque nombre réel x compris entre a et b un nombre réel noté $f(x)$.

Intuitivement, nous dirons que la fonction f est continue au point x si $f(y)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de $f(x)$ pour autant que y soit suffisamment proche de x. Souvent dans l'histoire des mathématiques, on a associé ce concept de continuité à une considération pratique : "*f est continue si l'on peut tracer son graphe cartésien sans lever son stylo, d'un trait continu*". L'exemple de fonction continue sans dérivée présenté dans le numéro d'octobre montre que cette considération pratique au sujet des fonctions continues est loin de les caractériser : il s'agit d'êtres parfois bien plus complexes. A la figure 1, on a esquissé le graphe d'une fonction continue particulièrement "sauvage". Jusqu'à Karl Weierstrass (1815-1897), on peut croire que l'existence même de ce type de fonctions continues n'était pas soupçonnée par la communauté mathématique. Weierstrass, en mettant en évidence ce phénomène, a profondément modifié la conception qu'ont pu avoir les mathématiciens de la notion de *continuité*.

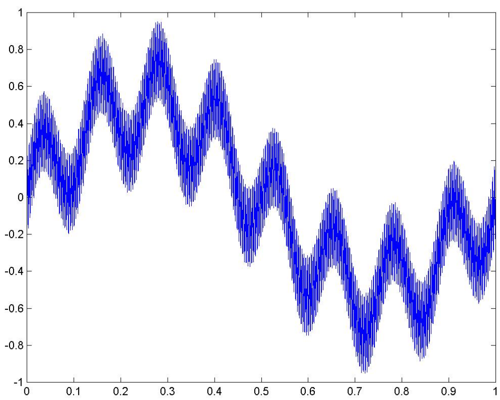

FIG. 1 – Une fonction continue particulièrement "sauvage"

Dans [1], la notion de fonction continue est bien formulée :

> *"[...] on entend par l'expression : une fonction $f(x)$ varie suivant la loi de continuité pour toutes les valeurs de x situées à l'intérieur ou à l'extérieures de certaines bornes, rien d'autre que ceci : si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x + \omega) - f(x)$ peut être rendue aussi petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre ω aussi petit que l'on voudra [...]"*

La définition de Bolzano traduit donc exactement l'intuition que nous mentionnions en début de section.

[1] Il est à noter que, à l'époque de Bolzano, la notion même de nombre réel est encore peu claire.

2 Le théorème des valeurs intermédiaires

Reformulé en termes actuels, le théorème des valeurs intermédiaires affirme que si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, négative au point a et positive au point b, alors il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

En particulier, considérons par exemple le polynôme $P(x) = x^3 - 5x + 1$. Les polynômes, comme on peut le montrer, définissent toujours des fonctions continues. Résoudre l'équation

$$x^3 - 5x + 1 = 0 \qquad (1)$$

revient donc à chercher un nombre réel c annulant le polynôme P. Or on calcule

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(0.5) = 0.125 - 5 \times 0.5 + 1 = -1.375.$$

En particulier P est positif en $x = 0$ et négatif en $x = 0.5$. Nous sommes donc assurés de l'existence d'une solution à l'équation (1) comprise entre 0 et 0.5, et cela grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

Les applications de ce théorème à l'algèbre et à l'analyse sont innombrables. Mais le rôle de ce résultat, dont la première démonstration satisfaisante est dûe à Bolzano, est loin de se limiter à ces quantités d'applications. En effet, l'énoncé de ce théorème et sa véracité étaient bien soupçonnés de nombreux mathématiciens, dont certains se sont exercés à en écrire des démonstrations, malheureusement lacunaires. La prise de conscience de ces lacunes par Bolzano a ainsi contribué à développer un souci de rigueur parmi les mathématiciens.

Bolzano objecte aux "démonstrations" connues jusque là une référence à des "évidences" dont il réfute le caractère évident dans [1]. Même si la notion de nombre réel reste floue à son époque, ses arguments montrent que Bolzano a déja une bonne idée de certaines propriétés du "continuum des nombres réels".

> *"[...] On lit dans certains ouvrages la conclusion suivante : 'Parce que $f(x)$ est positive pour $x = \alpha$, négative pour $x = \beta$, il faut qu'il y ait, entre α et β, deux grandeurs a et b pour lesquelles se fait le passage des valeurs positives de $f(x)$ aux valeurs négatives ; de cette sorte, il n'existe plus aucune valeur entre a et b pour laquelle $f(x)$ serait encore positive ou déjà négative', etc."*

Et Bolzano de continuer :

> *"Une affirmation aussi incorrecte nécessite à peine une réfutation, et elle ne serait même pas mentionnée ici, si elle ne nous servait à montrer à quel point les concepts de plusieurs mathématiciens, même réputés, concernant ce sujet sont encore indistincts. Il est pourtant bien connu qu'il existe une infinité de valeurs* intermédiaires *entres deux valeurs d'une* grandeur continûment variable indépendante *aussi rapprochées que l'on veut — et la racine x d'une fonction est une telle grandeur — et, aussi qu'aucune fonction continue n'a un* dernier *x qui la rende positive et aucun* premier *x qui la rende négative, et par conséquent aucuns a et b tels qu'on les a décrits ici ![...]"*

Si ses termes sont durs, il n'en a pas moins raison sur le fond. Les preuves du théorème des valeurs intermédiaires données jusqu'alors par certains mathématiciens réputés sont incomplètes.

Mentionnons par exemple l'excellent Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) qui, dans [2], présente dans le chapitre premier un essai de preuve du théorème des valeurs intermédiaires.

> "*1.* **Théorème I**. Si l'on a une équation quelconque, et que l'on connaisse deux nombres tels qu'étant substitués successivement à la place de l'inconnue de cette équation, ils donnent des résultats de signes contraires, l'équation aura nécessairement au moins une racine réelle dont la valeur sera entre ces deux nombres.
> *Ce théorème est connu depuis longtemps, et l'on a coutume de le démontrer par la théorie des lignes courbes ; mais on peut aussi le démontrer directement par la théorie des équations, en cette sorte. Soient x l'inconnue de l'équation, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ses racines, l'équation se réduira, comme l'on sait, à cette forme*
>
> $$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots = o."$$

Lagrange, qui s'intéresse aux équations polynômiales, considère un polynôme $P(x)$, et utilise implicitement l'existence d'une racine réelle à l'équation $P(x) = 0$, pour pouvoir mettre en évidence les monômes $(x - \alpha)$, $(x - \beta)$ et $(x - \gamma)$...en utilisant, j'imagine, le théorème de d'Alembert.

Or un polynôme ne possède pas nécessairement une racine réelle. L'utilisation du théorème de d'Alembert est donc très audacieuse.

De plus, le théorème fondamental de l'algèbre, qui affirme l'existence d'au moins une racine complexe (voir le numéro de novembre) à toute équation polynômiale, ne sera démontré de manière satisfaisante qu'en 1816 par Carl Friedrich Gauss (1777-1855), soit dix huit ans après la parution de la première édition du traité de Lagrange, et 8 ans après la parution de la seconde.

Lagrange poursuit son argument comme suit :

> *"Or soient p et q les nombres qui, substitués par x, donneront des résultats de signes contraires ; il faudra donc que ces deux quantités*
>
> $$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\dots$$
> $$(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)\dots$$
>
> *soient de signes différents ; par conséquent, il faudra qu'il y ait au moins deux facteurs correspondants, comme $p-\alpha$ et $q-\alpha$, qui soient de signes contraires ; donc il y aura au moins une des racines de l'équation, comme α, qui sera entre les nombres p et q,[...]*

3 Le théorème du supremum

Dans son remarquable article [1], Bolzano démontre le *théorème du suprémum*. Encore une fois, cela montre qu'il comprend bien la structure de l'ensemble des nombres réels, même s'il faudra attendre encore quelques années pour que la notion de nombre réel devienne très claire.

En notations modernes, on dit que M est un majorant du sous-ensemble S de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels si tous les éléments x de S vérifient $x \leqslant M$. Le *suprémum* de S est, s'il existe, le plus petit des majorants de l'ensemble S. Par exemple, tout nombre $M \geqslant 1$ est un majorant de l'intervalle $I = [0,1]$, et 1 est le suprémum de I ; tandis que l'ensemble $\mathbb{R}$ ne possède aucun majorant.

Le *théorème du suprémum* affirme que si S est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ qui possède un majorant, alors il existe un plus petit majorant de S. En d'autres termes, le suprémum de S existe. Citons Bolzano :

> *"[...] Or, on a le théorème suivant : aussi souvent qu'une certaine propriété M appartient à toutes les valeurs d'une grandeur variable i, qui sont plus petites qu'une valeur donnée, sans appartenir pour autant à* toutes les valeurs en général*, il existe toujours une valeur maximale u pour laquelle on peut affirmer que tous les i qui sont $< u$, ont la propriété M.[...]"*

Ce théorème, qui paraît simple si l'on examine la thèse dans le cas où S est un intervalle, est nettement moins évident à concevoir et à démontrer dans le cas où S est plus complexe.

4 La preuve de Bolzano du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, vérifiant $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Notons

$$S = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$$

l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ est négatif. On a $a \in S$, par hypothèse. En conséquence, S est non vide. D'autre part, b est un majorant pour S puisque tous les éléments de S sont compris entre a et b.

Bolzano montre alors que le suprémum de S (qui existe grâce au théorème du suprémum), noté c, est tel que $f(c) = 0$.

Il rend par là justice au théorème des valeurs intermédiaires, aujourd'hui souvent nommé théorème de Bolzano, en 1817.

Conclusion

Nous avons voulu présenter, dans cet article, la contribution remarquable de Bernard Bolzano aux mathématiques et au développement de leur formalisation.

Bolzano était *Prêtre séculier, Docteur de Philosophie, Professeur Royal et Impérial de la Science de la Religion et Membre titulaire de la Société Royale des Sciences à Prague*.

Cet article de 1817 est, à mon sens, un des plus beaux textes mathématiques jamais publiés.

Références

[1] Bernard Bolzano. Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent des résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. 1817.

[2] Joseph-Louis de Lagrange. Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. 1798.