Une correspondance étonnante
Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
laurent.moonens@uclouvain.be

Le 20 août 2007

Dans le numéro de Mars, nous avons déja abordé le problème de classer les ensembles infinis par leur “nombre d’éléments”. En particulier, nous avons discuté ce qui — pour des ensembles infinis — signifie “avoir le même nombre d’éléments, via l’existence d’une correspondance bi-univoque entre ces ensembles. Nous en avions déduit par exemple qu’il n’y a pas plus de fractions que de nombres entiers, mais que les nombres réels sont infiniment plus nombreux.

La question suivante est dans le même esprit : y a-t-il “plus de points” dans un carré que dans un segment de droite ? Nous allons voir qu’il n’en est rien.

1 L’équipotence

Précisons quelque peu notre pensée. Étant donné deux ensembles E et F, nous sohaitons donner un sens à l’expression “E a autant d’éléments que F” (nous dirons plutôt dans ce cas que E est *équipotent* à F).

Dans le cas d’ensembles infinis, l’expression “E a le même nombre d’éléments que F” perd son sens intuitif puisqu’il n’est plus possible de choisir un nombre entier correspondant au nombre d’éléments de E ou F. La solution que nous choisissons consiste à demander l’existence d’une correspondance entre E et F (c’est-à-dire d’une fonction f associant à chaque élément x de E un élément de F noté $f(x)$) qui fasse correspondre à deux éléments distincts de E, deux éléments distincts de F (i.e. f est injective) et telle que tout élément de F soit associé à un élément de E via cette correspondance (i.e. f est surjective). Nous parlerons de correspondance *bi-univoque* de E vers F.

Déjà, nous avons remarqué qu’en associant à chaque nombre entier son double, on définit une correspondance bi-univoque entre l’ensemble des nombres entiers $\mathbb{N}$ et l’ensemble $2\mathbb{N}$ des nombres pairs. Galilée fait à ce sujet le dialogue très éclairé que voici :

> “C’est bien là une des difficultés qui surgissent quand nous discutons, avec notre esprit fini, des choses infinies, et leurs attribuons les épithètes que nous utilisons pour les choses limitéés ; ce qui, à mon avis, est incorrect, car j’estime que des épithètes comme ‘plus grand’ et ‘égal’ ne conviennent pas aux grandeurs infinies, dont il est impossible de dire que l’une est plus grande, plus petite ou égale à une autre. Mais voici pour le prouver un raisonnement qui me revient à l’esprit [...] Vous savez parfaitement, je suppose, quels nombre sont carrés et quels nombres ne le sont pas.
>
> -Je sais parfaitement qu’un nombre carré provient de la multiplication d’un autre nombre par lui-même ; ainsi quatre, neuf, etc., sont des nombres carrés résultant de la multiplication de deux, trois, etc., par eux-mêmes.
>
> -Fort bien ; et vous savez aussi que comme les produits sont appelés carrés, les facteurs, c’est-à-dire les termes que l’on multiplie, sont appelés côtés ou racines ; quant aux nombres qui ne proviennent pas de nombres multipliés par eux-mêmes, ce ne sont pas des carrés. Par conséquent, si je dis que les nombres pris dans leur totalité, en incluant les carrés et les non-carrés, sont plus nombreux que les carrés seuls, j’énoncerai, n’est-ce pas, une proposition vraie ?
>
> -Très certainement.
>
> -Si je demande maintenant combien il y a de nombre carrés, on peut répondre, sans se tromper, qu’il y en a autant que de racines correspondantes, attendu que tout carré a sa racine et toute

racine son carré, qu'un carré n'a pas plus d'une racine, et une racine pas plus d'un carré.

-Exactement.

-Mais si je demande combien il y a de racines, on ne peut nier qu'il y en a autant que de nombres, puisque tout nombre est la racine de quelque carré ; cela étant, il faudra donc dire qu'il y a autant de nombres carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y en a autant que de racines, et que les racines représentent l'ensemble des nombres ; et pourtant nous disions au début qu'il y a beaucoup plus de nombres que de carrés, étant donné que la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés.[...]

-Qu'en conclure dans ces conditions ?

-A mes yeux, la seule issue possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini, le nombre de leurs racines, pareillement ; que le total des nombres carrés n'est pas inférieur à l'ensemble des nombres, ni celui-ci supérieur à celui-là, et, finalement, que les attributs 'égal', 'plus grand' et 'plus petit' n'ont pas de sens pour les quantités infinies, mais seulement pour les quantités finies. [...]"

GALILÉE, PARADOXES DE L'INFINI.

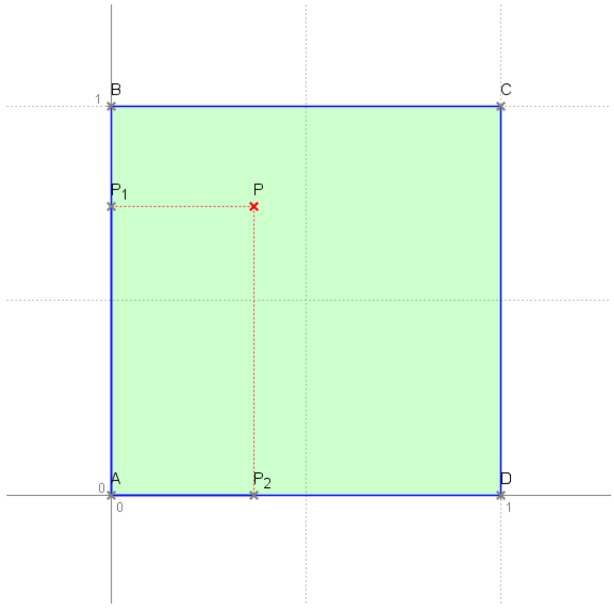
En conclusion, on peut remarquer que l'égalité d'ensembles et l'équipotence sont deux notions bien différentes.

Pour continuer dans la lignée, nous allons montrer comment il est possible de mettre en correspondance bi-univoque un segment de droite et un carré. En particulier, carré et segment sont équipotents !

2 Carré et segment : autant d'éléments !

Sur le segment de droite $[AB]$ dont on fixe la longueur $\overline{AB}$ à 1, décidons de repérer un point P par la longueur du segment $[AP]$ qu'il détermine. A tout point P de $[AB]$ on associe donc un nombre réel compris entre 0 et 1. On identifiera P à l'écriture décimale de ce nombre réel. Par exemple, le milieu du segment $[AB]$ sera repéré par $0,5$.

Dans le carré $ABCD$ dont on fixe le côté à 1, repérons un point P par deux nombres : les longueurs $\overline{AP_1}$ et $\overline{AP_2}$ des projections qu'il détermine sur $[AB]$ et $[AD]$ respectivement (cf. figure). Par exemple, le centre du carré sera repéré par les nombres $0,5$ et $0,5$ tandis que $0;0$ repèrent A ; $1;0$ repèrent B $0;1$ repèrent D et $1;1$ repèrent C.



Nous proposons alors d'associer à tout point du segment $[AB]$, repéré par le nombre réel

$$0,d_1d_2d_3d_4d_5d_6\ldots$$

(où $d_1, d_2, d_3, \ldots$ sont donc des chiffres compris entre 0 et 9 apparaissant dans l'écriture décimale du nombre en question) le point du carré $ABCD$ représenté par les nombres

$$0,d_1d_3d_5\ldots \quad \text{et} \quad 0,d_2d_4d_6\ldots$$

Par exemple, au point du segment $[AB]$ repéré par le nombre

$$0,\mathbf{2}5\mathbf{3}6\mathbf{5}3\mathbf{6}3\mathbf{5}3\mathbf{8}8\mathbf{8}2\mathbf{0}0\mathbf{3}6\mathbf{7}8\ldots$$

on associe le point du carré $ABCD$ repéré par les nombres

$$0,\mathbf{2356588037}\ldots \quad \text{et} \quad 0,5633382068\ldots$$

Il est clair (modulo l'égalité $1 = 0,99999\ldots$ et quelques précautions supplémentaires) que l'on dispose de cette façon d'une correspondance bi-univoque entre les points du segment $[AB]$ et ceux du carré $ABCD$.

En d'autres termes, carré et segment sont équipotents, en un certain sens, ils ont "le même nombre d'éléments".