Autour des ensembles dénombrables

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 mars 2007

À l'origine, j'avais pensé, pour le numéro de mars d'AlmaSoror, continuer avec quelques considérations à propos des fonctions continues, dont l'étude s'avère être passionnante.

La très belle conférence de Benoît Mandelbrot (né en 1924) à Bruxelles ce lundi 12 mars m'a aussi donné envie de parler d'ensembles *fractals* (le mot *fractal* est dû à B. Mandelbrot).

Cependant, j'ai voulu faire coïncider le sujet de l'article de la page scientifique de mars 2007 avec celui d'un exposé que je donnerai à des étudiants de terminale le 20 mars, jour de la sortie de ce numéro. Je vous propose donc d'illustrer en quelques pages le concept d'*ensemble dénombrable* et d'en donner des exemples et contre-exemples.

1 Ensembles (in)finis

Partons de la notion naïve d'ensemble : un ensemble E est univoquement déterminé par la donnée de ses *éléments*. C'est le principe d'extensionnalité : deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments. On écrira $x \in E$ pour signifier que x est un élément de l'ensemble E. On dira encore que x *appartient* à E.

1.1 Quelques exemples

Citons quelques ensembles 'familiers'. L'ensemble $\mathbb{N}$ des *nombres naturels* est constitué des entiers $0, 1, 2, 3, \dots$. On écrira

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des *entiers relatifs* est constitué des entiers signés $0, 1, -1, 2, -2, \dots$. On écrira

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des *nombres rationnels* est constitué des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{m}{n}$, où $m \in \mathbb{Z}$ est un entier et $n \in \mathbb{N}$ est un nombre naturel *non nul*. L'écriture

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\},$$

se lit : '$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rapports $\frac{m}{n}$ *avec* $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \neq 0$'. Par exemple, $0,5$ et $0,3333\dots$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$ qui s'écrivent sous forme fractionnaire comme $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement.

L'ensemble des diviseurs de 72, constitué des éléments $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36$ et 72 est noté

$$\operatorname{div} 72 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}.$$

L'ensemble E des résultats possibles lors du jet d'un dé ordinaire est constitué des résultats $1, 2, 3, 4, 5$ et 6. On écrit

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Naturellement, on a envie de qualifier les trois premiers ensembles précédents d'*infinis*, et les deux derniers de *finis*.

Définir l'expression 'E est un ensemble infini' est loin d'être un exercice facile. Nous suggérons d'ailleurs au lecteur intéressé de tenter d'en écrire une définition qui ne fasse pas référence à elle-même (par exemple, dire qu'un ensemble infini compte une infinité d'éléments n'est pas une solution acceptable : si l'on n'a pas encore défini la notion d'ensemble infini, qu'appelle-t-on une 'infinité' d'éléments ?).

1.2 Vers une définition

Commençons par définir ce qu'est une bijection d'un ensemble sur un autre.

Définition 1. Une application f associant à chaque élément de E un élément de F est appelée une *bijection* de E sur F si les conditions suivantes sont satisfaites :

– chaque élément de F est associé par l'application f à un élément de E,
– deux éléments distincts de E sont associés par f à deux éléments distincts de F.

Exemple 1. On note $m\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de l'entier relatif m. L'application f de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}$ associe à un nombre naturel n son double $2n$. Cette application est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $2\mathbb{N}$.

Par contre, l'application g de $E = \{0, 1\}$ dans $F = \{-1\}$ envoyant 0 et 1 sur -1 n'est pas une bijection de E sur F car les éléments distincts 0 et 1 de E sont envoyés sur le même élément de F.

Enfin, l'application h de $E' = \{0\}$ dans $F' = \{1, 2\}$ envoyant 0 sur 1 n'est pas une bijection de E' sur F' car aucun élément de E' n'est envoyé sur 2.

Dès maintenant, pour dire qu'une application f associe l'élément b de F à l'élément a de E, on notera $f(a) = b$.

Définissons la notion d'*équipotence* entre ensembles.

Définition 2. Un ensemble E est dit *équipotent* à F s'il existe une bijection de E sur F.

Nous pouvons alors remarquer la chose suivante. Un ensemble 'fini' E (dans le sens naïf du terme) ne sera équipotent à l'ensemble 'fini' F que s'ils ont le même nombre d'éléments.

En effet, si E compte 'moins' d'éléments que F et si f est une application de E dans F, il existera au moins un élément de F qui ne sera pas associé à un élément de E. Il en résulte que f ne peut être une bijection de E sur F.

De même, si E compte 'plus' d'éléments que F et si f est une application de E dans F, il existera nécessairement deux éléments distincts de E qui seront envoyés sur le même élément de F par l'application f ; et f ne peut être une bijection.

Il en résulte que deux ensembles 'finis' E et F ne seront équipotents que s'ils ont le même 'nombre d'éléments'.

Si ce raisonnement est naïf (il fait référence à la notion naïve d'ensemble fini, qui n'a pas été définie de manière formelle), il nous permet de remarquer la chose suivante : un ensemble fini E ne peut pas être équipotent à un de ses sous-ensembles obtenu en retirant au moins un élément à E. En effet, un tel sous-ensemble (appelé une *partie propre* de E) ne possède jamais le même nombre d'éléments que E.

Par contre, un ensemble infini peut être équipotent à une de ses parties propres. Nous avons vu plus haut que l'ensemble des multiple de 2 est équipotent à l'ensemble de tous les nombres naturels. Or l'ensemble des multiples de 2 est obtenu à partir de l'ensemble des nombres naturels en lui retirant les nombres impairs. Les multiples de 2 forment donc bien une partie propre de l'ensemble $\mathbb{N}$, équipotente à $\mathbb{N}$.

Nous allons passer de cette observation à la définition suivante.

Définition 3. Un ensemble E est dit *fini* s'il n'est équipotent à aucune de ses parties propres. Dans le cas contraire, E est dit *infini*.

Nous disposons donc d'une définition du terme 'ensemble infini' élaborée à partir d'observations naïves. Ce procédé est dans notre cas très enrichissant puisque d'observations naïves très simples, nous avons déduit une définition formelle qui correspond à l'intuition qu'on a quant aux termes 'ensemble (in)fini'.

2 Ensembles dénombrables

Dans la classe des ensembles infinis, nous allons montrer qu'on peut distinguer des ensembles moins 'gros' que d'autres. Parmi tous les ensembles infinis, les *ensembles dénombrables* sont les plus 'minces'.

Intuitivement, on dira qu'un ensemble E est dénombrable si on peut trouver une suite indicée par les naturels $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ qui énumère complètement les éléments de E, et telle que $x_j \neq x_k$ si $j \neq k$. En particulier, l'application de $\mathbb{N}$ dans E qui associe au naturel k l'élément x_k de E serait alors une bijection de $\mathbb{N}$ sur E, E est équipotent à $\mathbb{N}$. C'est la définition que nous allons prendre.

Définition 4. L'ensemble E est dit *dénombrable* s'il est équipotent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombre naturels.

Un ensemble dénombrable est un ensemble *infini* (c'est un excellent exercice que de le montrer en utilisant les définitions ; nous le conseillons au lecteur intéressé). Par ailleurs, on peut 'compter' les éléments de E, les énumérer.

Il est clair que l'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable (tout ensemble est équipotent à lui même).

Par ailleurs, nous avons montré plus haut que l'ensemble $2\mathbb{N}$ des multiples de 2 était équipotent à $\mathbb{N}$. Il est donc aussi dénombrable. En effet, on comprend bien que la suite

$$x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, \ldots$$

énumère les multiples de 2.

Voyons que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs est lui aussi dénombrable. En effet, la suite

$$x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 2, \dots$$

énumère les éléments de $\mathbb{Z}$. Plus formellement, nous noterons $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de x (i.e. $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier naturel supérieur ou égal à x ; par exemple $\lceil 0 \rceil = 0$; $\lceil 0,5 \rceil = 1$; $\lceil 2 \rceil = 2$; $\lceil 1,1 \rceil = 2$). L'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = (-1)^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$

est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$. On a $f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 1, \dots$.

Observons aussi que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (cfr. section 1) est dénombrable : on peut énumérer les fractions ! Pour le voir, dressons un tableau Numérateur/Dénominateur dans lequel chaque intersection entre une ligne verticale et horizontale représente une fraction :

D\N	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	$\dots$
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\dots$
2	$\frac{0}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-4}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\dots$
3	$\frac{0}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\dots$
4	$\frac{0}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Parcourons alors ce tableau en diagonale de la manière suivante : commençons en $\frac{0}{1}$, ensuite passons en $\frac{-1}{1}$ puis en $\frac{0}{2}$ et remontons alors en diagonale en passant par $\frac{0}{3}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{1}$ et continuons ce procédé comme la figure ci-après l'illustre.

D\N	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	$\dots$
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\dots$
2	$\frac{0}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-4}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\dots$
3	$\frac{0}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\dots$
4	$\frac{0}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Remarquons que cela nous permet de construire une énumération de $\mathbb{Q}$. En effet, posons $x_0 = \frac{0}{1} = 0$, $x_1 = \frac{-1}{1} = -1$. Si nous suivons notre comptage diagonal, nous tombons alors sur la fraction $\frac{0}{2} = \frac{0}{1} = 0$ que nous avons déja énumérée. Même remarque pour $\frac{0}{3}$. Pour ne pas les citer deux fois dans notre énumération, poursuivons avec $x_2 = \frac{-1}{2}$, $x_3 = \frac{-2}{1} = -2$, etc. La suite $x_0, x_1, x_2, \dots$ obtenue constitue alors une énumération des nombres rationnels.

Le raisonnement ci-dessus permet une bonne compréhension du caractère dénombrable de l'ensemble des nombres rationnels : on dresse un tableau Numérateur/Dénominateur et on 'compte' le long des diagonales. Néanmoins, une preuve complète demanderait un peu plus de soin. Nous renvoyons le lecteur à l'excellent ouvrage [1].

Bien que surprenant à priori, nous avons aussi bien énuméré les nombre pairs que les nombres rationnels. On aurait pu s'attendre à ce qu'il y ait beaucoup plus de nombres rationnels que de nombres entiers, mais du point de vue de la *quantité d'éléments*, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $2\mathbb{N}$ sont identiques. On dit qu'ils ont même *cardinal*.

Nous posons alors une autre question : existe-t-il des ensembles infinis qui ne soient pas dénombrables ? La réponse à cette question est affirmative.

3 Les nombres réels

Un nombre rationnel possède un développement décimal limité ou illimité périodique. Par exemple, on écrit

$$\frac{1}{2} = 0,5; \frac{1}{4} = 0,25; \frac{1}{8} = 0,125$$

et

$$\frac{1}{3} = 0,\mathbf{3}\dots; \frac{4}{23} = 0,\mathbf{1739130434782608695652}\dots$$

où la *période* (en gras) est répétée à l'infini.

Les nombres *réels* possèdent un développement décimal limité, illimité périodique ou illimité *non périodique*. Tout nombre rationnel est donc un nombre réel, mais certains nombres réels (comme π et e) ne possèdent pas de développement limité ou illimité périodique : il s'agit des nombres *irrationnels*.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Nous allons voir que $\mathbb{R}$ constitue un exemple d'ensemble *infini non dénombrable*. Pour nous en convaincre, exposons un joli argument *diagonal*.

3.1 L'argument diagonal

Procédons par l'absurde, et supposons que $\mathbb{R}$ soit dénombrable. Il existe donc une énumération $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ de $\mathbb{R}$. Explicitons ces réels $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ sous forme décimale : par exemple

$$\begin{array}{ccrcl}
x_0 & = & 243 & , & 3455882517729\dots; \\
x_1 & = & 1152 & , & 4356278892007\dots; \\
x_2 & = & 0 & , & 1111111111115\dots; \\
x_3 & = & 4 & , & 2315588368993\dots; \\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Formons alors un nouveau nombre réel x de la façon suivante : pour la partie entière de x, choisissons un nombre entier différent de la partie entière de x_0 (par exemple, -6) : $x = -6, \ldots$.

Pour la première décimale de x, choisissons un chiffre différent de la première décimale de x_1 (par exemple, 0) : $x = -6, 0 \ldots$.

Pour la seconde décimale de x, choisissons un chiffre différent de la seconde décimale de x_2 (par exemple, 2) : $x = -6, 02 \ldots$.

Pour la troisième décimale de x, choisissons un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 (par exemple, 6) : $x = -6, 026 \ldots$.

En continuant de la sorte, on forme le nombre réel x. Mais x ne peut être énuméré dans la liste plus haut. En effet, il est clair que $x \neq x_0$ puisque x et x_0 n'ont pas la même partie entière. De même, $x \neq x_1$ puisque x et x_1 n'ont pas la même première décimale. De la même façon, on voit que $x \neq x_2$, $x \neq x_3$,.... Dès lors, x ne se trouve pas énuméré dans la liste $x_0, x_1, x_2, \ldots$ qui se trouvait être une énumération de l'ensemble des réels. Contradiction.

Il est à noter que le raisonnement précédent ne tient pas compte de l'ambiguïté de la notation décimale, qui provoque par exemple l'égalité $0, 999 \ldots = 1$. Pour la transformer en une preuve correcte, il faut être très au fait de ces ambiguïtés et de l'utilisation des expressions décimales (ce n'est pas chose facile !). Nous allons donc donner une preuve différente du caractère non dénombrable de l'ensemble $\mathbb{R}$, toujours par l'absurde.

3.2 Intervalles fermés emboîtés

Si $a < b$ sont des réels, on appelle $[a, b]$ l'*intervalle fermé joignant a et b*. C'est l'ensemble constitué des nombres réels x vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$. En particulier, a et b sont des éléments de $[a, b]$.

Si I et J sont des intervalles fermés, on dira que J est inclus dans I si tout élément de J est aussi un élément de I. On notera $J \subset I$.

Une suite $I_0, I_1, I_2, I_3, \ldots$ d'intervalles fermés est dite *emboîtée* si l'on a $I_1 \subset I_0, I_2 \subset I_1, I_3 \subset I_2$ etc. L'ensemble des nombres réels possède la remarquable propriété suivante, appelée *propriété des intervalles fermés emboîtés*.

Propriété 1 (Propriété des intervalles fermés emboités)**.** *Si $I_0, I_1, I_2, I_3, \ldots$ est une suite emboîtée d'intervalles fermés, alors il existe un nombre réel c qui appartient à tous les intervalles $I_0, I_1, I_2, I_3, \ldots$.*

Nous allons voir que la dénombrabilité de $\mathbb{R}$ contredirait la propriété des intervalles fermés emboîtés.

Théorème 2. *L'ensemble des nombres réels est non dénombrable.*

Démonstration. Nous allons en fait montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est non dénombrable, ce qui impliquera la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$ (le vérifier est un bon exercice). Pour ce faire, procédons par l'absurde, et imaginons que la suite $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ énumère l'intervalle $[0, 1]$. Dans ce cas, si on divise $[0, 1]$ en trois intervalles *fermés* de même longueur, un de ces trois intervalles (appelons-le I^0) ne contient pas x_0. Divisons I^0 de manière similaire, et obtenons un intervalle I^1 ne contenant ni x_0, ni x_1. Continuons la procédure. On obtient une suite $I^0, I^1, I^2, I^3, \ldots$ d'intervalles fermés emboîtés, telle que I^k ne contienne aucun des éléments $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ pour chaque naturel k. Or il existe (c'est la *propriété des intervalles fermés emboîtés*) un point commun à tous les I^k, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ce point commun ne peut être égal à aucun des x_k, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, et dès lors la suite $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ n'est pas une énumération de $[0, 1]$. Contradiction. ∎

L'ensemble des nombres réels est donc un ensemble bien plus gros que celui des nombre rationnels : aucune suite $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ ne suffit à énumérer l'ensemble $\mathbb{R}$! Le *cardinal* de l'ensemble $\mathbb{R}$ est donc plus grand que le *cardinal* de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

4 Hypothèse du continu

On pourrait alors se demander s'il existe des ensembles 'intermédiaires', c'est-à- dire de cardinal plus petit que celui de $\mathbb{R}$ mais plus grand que celui de $\mathbb{Q}$.

Cette question est indécidable : on peut montrer qu'il n'existe pas de preuve de l'existence d'un tel ensemble, mais qu'il n'existe pas non plus de preuve de la non-existence d'un tel ensemble.

Ajouter à la théorie des ensembles l'hypothèse de la non-existence d'un tel ensemble (appelée *hypothèse du continu*) ou sa négation ne change en rien la consistance des mathématiques.

Merci à Géry pour ses excellentes suggestions.

Références

[1] Jean Mawhin. *Analyse. Fondements, techniques, évolution.* De Boeck (Bruxelles), 1997.