Mouvement brownien et fonctions harmoniques

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.R.S.-FNRS (Belgique)

Le 20 mars 2008

Pour cet article de mars, nous vous proposons cette fois un voyage aux intersections des probabilités et de l'analyse : le mouvement brownien au service du problème de Dirichlet.

Nous verrons comment un processus purement aléatoire permet d'obtenir une solution à un problème de recherche d'une fonction *harmonique* ayant ses valeurs fixées sur le bord d'un domaine.

1 Fonctions harmoniques dans un domaine

Nous travaillerons dans l'espace à trois dimensions E^3, et nous fixerons dans celui-ci un domaine fini U (on demande que ce domaine soit limité par une courbe “régulière”, on parlera de domaine *admissible* dans la suite), une fonction continue u associant à chaque point X du domaine U un nombre réel (pensons par exemple à la fonction “température” qui associe à chaque point d'une pièce la température qu'il y fait).

Étant donné un point X de l'espace E^3 et un rayon $R > 0$, nous appellerons $S(X,R)$ la *sphère* (creuse) centrée en X et de rayon R (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points de l'espace situés à une distance *égale* à R du point X). Nous désignerons par $M(u,X,R)$ la *valeur moyenne* de la fonction u sur la sphère $S(X,R)$ (les plus expérimentés d'entre vous entendront par là le nombre

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int_{S(X,R)} u\,dS$$

obtenu en divisant l'intégrale de surface de u sur la sphère $S(X,R)$ par la surface de cette dernière).

Nous dirons que la fonction u est *harmonique* dans U si l'égalité

$$u(X) = M(u,X,R)$$

a lieu pour chaque $R > 0$ qui soit tel que la spheire pleine centrée en X et de rayon R soit entièrement contenue dans U. La valeur d'une fonction harmonique en un point de U est la moyenne de ses valeurs sur n'importe quelle sphère centrée en ce point et suffisamment petite pour être contenue à U une fois remplie.

Rappelons qu'un *vecteur* est un couple orienté de deux points A et B de l'espace, généralement noté $\overrightarrow{AB}$; on note alors $\|\overrightarrow{AB}\|$ l'intensité du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (i.e. la longueur du segment joignant A à B). Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le *nombre réel*

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC});$$

si $\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ désigne l'angle (non orienté) formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Commençons par donner quelques exemples de fonctions harmoniques :

a) si u est une fonction constante, alors u est harmonique dans tout domaine admissible U ;

b) si nous fixons un nombre réel a, un point O (une origine) dans l'espace, un autre point A et si l'on définit une fonction u en un point X de l'espace par

$$u(X) = a + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX},$$

alors u est harmonique dans tout domaine admissible U.

2 Le problème de Dirichlet

Dans le problème de Dirichlet, on cherche, si possible, une fonction harmonique qui prenne, à la frontière de U, des valeurs fixées à l'avance. On se donne donc, en chaque point Y de la frontière de U, une valeur $\varphi(Y)$ et on cherche à trouver, le cas échéant, une fonction harmonique dans U qui soit telle que, pour un point Y de la frontière de U,

$$u(Y) = \varphi(Y).$$

2.1 Mouvement Brownien

Un mouvement Brownien est un processus “aléatoire”. Partant d'un point, une particule peut partir dans n'importe quelle direction, et la probabilité est *uniforme* sur toutes les directions possibles (aucune direction n'est privilégiée). On peut penser par exemple à une molécule se déplaçant au sein d'un gaz : le mouvement est continuel et irrégulier, il semble aléatoire, ou l'expérience de Brown avec des particules de pollen dans l'eau examinées au microscope.

D'autres conditions définissent le mouvement brownien, par exemple on demande à ce que la dispersion moyenne de la particule par rapport à son point de départ croisse proportionnellement au temps, et à ce que le mouvement d'une particule en un temps donné soit indépendant de son parcours précédent.

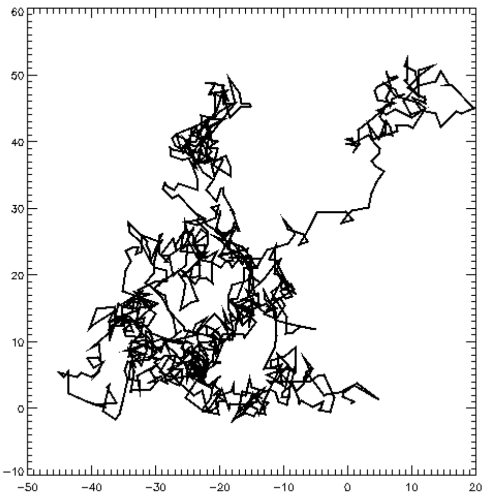

FIG. 1 – Une trajectoire typique d'un mouvement brownien (image Wikipedia)

Le mouvement Brownien permet une construction élégante d'une solution au problème de Dirichlet.

2.2 Retour au problème de Dirichlet

Fixons à présent pour chaque point Y de la frontière un nombre réel $\varphi(Y)$ et cherchons à résoudre le problème de Dirichlet pour cette donnée au bord.

Étant donné un point X intérieur au domaine U, on cherche d'abord à définir la valeur de $u(X)$. Pour ce faire,

a) étant donné une trajectoire d'un mouvement brownien partant de X, on appelle Y_X le premier point de rencontre de cette trajectoire avec la frontière de U (voir la figure 2) ;

b) on regarde ensuite quelle est la moyenne de la valeur de $\varphi(Y_X)$ pour tous les mouvements browniens possibles partant de X ;

c) cette moyenne définit la valeur de $u(X)$.

Il nous reste à vérifier, pour avoir une solution au problème de Dirichlet, que la fonction u ainsi définie est bien

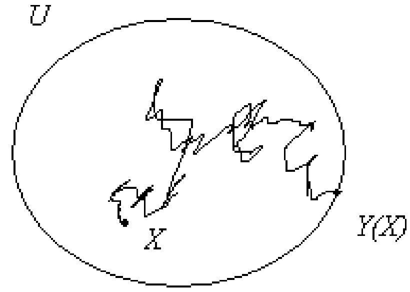

FIG. 2 – Le premier point de rencontre d'une trajectoire brownienne avec la frontière de U

harmonique dans U.

En d'autres termes, il faut vérifier qu'étant donné un point X de U et un rayon $R > 0$ pour lequel la sphère pleine de centre X et de rayon R est entièrement contenue dans U, alors $u(X)$ égale la moyenne de u sur $S(X, R)$.

Il vaut la peine de se concentrer sur la raison qui fait cette égalité.

Commençons par observer que si Z est un point de la sphère $S(X, R)$, alors $u(Z)$ est la moyenne sur toutes les trajectoires browniennes partant de Z, des valeurs possibles pour $\varphi(Y(Z))$.

D'autre part, toute trajectoire brownienne partant de X et rencontrant la frontière de U doit d'abord traverser la sphère $S(X, R)$ (voir figure 3).

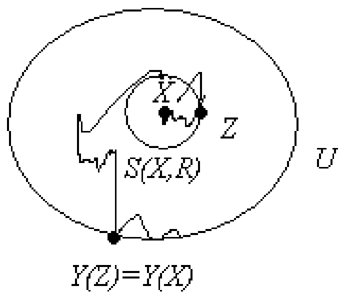

FIG. 3 – Sortie de $S(X, R)$ avant la sortie de U

Mais, aucune direction ne peut être privilégiée pour sortir de $S(X, R)$, partant de X. D'autre part, la trajectoire brownienne une fois sortie de $S(X, R)$ est indépendante du parcours précédent. En conséquence, parmi toutes les trajectoires browniennes partant de X, on trouve, après sortie de $S(X, R)$, toutes les trajectoires browniennes possibles partant de tous les points de la sphère $S(X, R)$, la distribution de ces dernières étant uniformément répartie sur la sphère !

Mais alors, la valeur de $u(X)$ n'est finalement que la moyenne sur tous les points Z de $S(X, R)$ possibles, de la moyenne sur toutes les trajectoires partant de Z, des valeurs que prendra $\varphi(Y(Z))$.

C'est-à-dire, u est harmonique dans U (et u est donc solution au problème de Dirichlet avec φ pour donnée à la frontière).

Comme le passage précédent est délicat mais fournit au problème de Dirichlet une solution d'une rare élégance, il vaut la peine de se concentrer dessus et de le relire posément, ou d'y penser à l'aise sur un quai de gare lors d'une grève SNCF.

3 Conclusion

Finalement, voici presque qu'une expérience de physique nous aiderait à résoudre un problème mathématique ! Cherchons une fonction qui ait des valeurs imposées à la frontière d'un domaine U, et qui soit harmonique dans U.

Pour calculer (approximativement) la valeur en un point X d'une solution à ce problème, libérons une grande quantité de particules (disons N) en X, examinons les premiers points $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ auxquels ces particules rencontrent la frontière de U, et calculons la moyenne

$$\frac{\varphi(Y_1) + \varphi(Y_2) + \cdots + \varphi(Y_N)}{N}.$$

La physique au service d'un problème d'analyse. L'idée transit ! Mais où sont donc nos repères ?