Convergence(s) !

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 août 2007

A de nombreuses reprises déja, nous avons parlé, parfois sans le dire, de la notion de *convergence*. Évitant d'en écrire une définition précise, nous avons préféré en donner le sens intuitif : étant donné une suite $x_0, x_1, x_2 \ldots$, nous la qualifierons de *convergente* s'il existe un point x duquel les points $x_0, x_1, x_2 \ldots$ 'se rapprochent indéfiniment'.

Dans un cadre très général, nous allons consacrer cette page du mois d'août à préciser ce que l'on entend par *convergence* d'une suite.

1 Convergence d'une suite de réels

Commençons par donner ici l'intuition qui nous conduira à une définition formelle.

Donnons-nous une suite $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de nombres réels. On dira que x_0 est l'élément de *rang* 0 de la suite, que x_1 est son élément de rang 1, que x_2 est son élément de rang 2 etc.

Dire de la suite $x_0, x_1, x_2 \ldots$ qu'elle *converge* vers le nombre réel x signifie intuitivement qu'elle 's'en rapproche indéfiniment'.

Etant donné un très petit nombre réel positif ε (par exemple $\varepsilon = 0.000001$), nous devons être capable de montrer qu'à partir d'un certain rang (par exemple, à partir du terme x_{1000}), *tous* les éléments de la suite de rang plus élevé ne s'écartent pas de x de plus d'ε.

Le point est de remarquer que, si nous autorisons ε à être *aussi petit que l'on veut*, la propriété précédente traduit alors exactement ce que nous attendons de la *convergence*.

Remarquons aussi que l'écart entre deux nombres réels x et y se mesure simplement par la *valeur absolue de leur différence* $x - y$:

$$\text{Écart entre } x \text{ et } y : |x - y|.$$

Proposons-donc la définition suivante. Nous utiliserons les notations $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ pour l'ensemble des nombres naturels, $\mathbb{R}$ pour l'ensemble des nombres réels et nous écrirons $x \in A$ pour signifier que x est un élément de l'ensemble A. Écrire $x < y$ ou $y > x$ signifiera que x est strictement inférieur à y, tandis que nous écrirons $x \leqslant y$ ou $y \geqslant x$ pour signigier que l'on a $x = y$ ou $x < y$.

Définition 1. Soit $S = x_0, x_1, x_2, \ldots$ une suite de nombres réels. Nous dirons que la suite S *converge* vers le nombre réel x si, chaque fois que nous choisissons un nombre réel $\varepsilon > 0$ (positif), il existe un entier naturel m tel que, pour chaque entier naturel n supérieur à m, l'écart entre x et le terme de rang n de la suite S est plus petit qu'ε. Ceci se reformule comme suit : pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $|x_n - x| < \varepsilon$ dès que $n \in \mathbb{N}$ vérifie $n > m$.

La suite S est *convergente* s'il existe un nombre réel x tel que S converge vers x.

Il est intéressant de remarquer la particularité de l'approche précédente : la définition que nous venons de poser est typique en *analyse*. Nous avons défini la notion de 'convergence vers x' en requérant de l'écart $|x_n - x|$ qu'il devienne non pas nul, mais bien *aussi petit que l'on veut*. L'erreur $|x_n - x|$ peut n'être jamais nulle, mais doit pouvoir être *arbitrairement* petite.

D'autre part, la définition de convergence permet de montrer le résultat suivant : si la suite de réels $S = x_0, x_1, x_2 \ldots$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ *et* vers $y \in \mathbb{R}$, alors $x = y$! Une suite ne peut jamais converger vers deux valeurs différentes ! En particulier, nous appellerons la valeur commune de x et y la *limite* de la suite S lorsque S est convergente.

Exemple 1. Étant donné $x \in \mathbb{R}$, la suite $x, x, x, x, x, x, \ldots$ est toujours convergente, et sa limite est x. La suite

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

est convergente, et sa limite est 0. Par contre, la suite $1, -1, 1, -1\ldots$ n'est pas convergente.

2 Distance dans le plan euclidien

Notons E (en hommage à Euclide) le plan (usuel), muni de sa notion intuitive de *distance* entre deux points. Si P, Q sont des points de E, on désignera par $\mathrm{dist}_E(P,Q)$ la distance entre P et Q, i.e. la *longueur* du segment $[PQ]$ joignant P et Q si P, Q sont distincts, et 0 sinon. La distance $\mathrm{dist}_E(P,Q)$ est toujours un nombre réel, positif ou nul.

Il est clair que la condition $\mathrm{dist}_E(P,Q) = 0$ est *équivalente* à l'égalité $P = Q$: si P et Q sont distincts, alors $\mathrm{dist}_E(P,Q) > 0$.

D'autre part, les segments $[PQ]$ et $[QP]$ ont même longueur, on a donc :

$$\mathrm{dist}_E(P,Q) = \mathrm{dist}_E(Q,P).$$

Enfin, et ceci constitue la célèbre *inégalité triangulaire*, si P, Q et R sont trois points de E, alors on a

$$\mathrm{dist}_E(P,Q) \leqslant \mathrm{dist}_E(P,R) + \mathrm{dist}_E(R,Q),$$

cette inégalité triangulaire exprimant en particulier qu'aller de P à Q en ligne droite est *toujours* plus court que de passer par un point intermédiaire R, ce qui explique le confort horaire de l'utilisation de la voiture personnelle par rapport à l'utilisation du train pour se rendre de Luxembourg-ville à Bruxelles-central. La voiture suit en effet une autoroute (raisonnablement) rectiligne pour rejoindre Bruxelles par le Sud-Est, tandis que le train fait escale au Nord de la ville avant d'en rejoindre le centre[1].

Il nous est à présent possible de définir la notion de *convergence* d'une suite de points $P_0, P_1, P_2, \ldots$ du plan.

En effet, on peut associer à S et P la suite de nombres réels

$$S' = d(P_0,P), d(P_1,P), d(P_2,P), \ldots$$

Dire que la suite S converge vers P peut alors se définir en demandant que la distance des points de la suite S à P devienne aussi petite que l'on veut. Mais demander que cette distance devienne arbitrairement petite revient à demander que la suite S' converge vers 0 (S' est une suite de réels !).

Définition 2. Soit $S = P_0, P_1, P_2, \ldots$ une suite de points du plan euclidien. Nous dirons que la suite S *converge* vers le point P du plan si la suite de réels

$$S' = d(P_0,P), d(P_1,P), d(P_2,P), \ldots$$

converge vers 0.

La suite S est *convergente* s'il existe un point P du plan tel que S converge vers P.

Si la suite $S = P_0, P_1, P_2, \ldots$ de points du plan converge vers P et Q, on montre aussi que $P = Q$. Ce point $P = Q$ est alors appelé la *limite* de la suite S.

[1] Blague belge inspirée d'un fait réel.

3 Convergence dans un espace métrique

De l'exemple du plan Euclidien, inspirons-nous et introduisons la notion de *distance* sur un ensemble quelconque.

Pour ce faire, nous allons partir d'un ensemble quelconque X et appeler *distance* sur X une application d associant à chaque couple de points un nombre réel

$$d(x,y) > 0$$

appelé *distance* de x à y, et pour laquelle les propriétés suivantes sont vérifiées quels que soient les éléments x, y, z de X :

- on a $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- $d(x,y) = d(y,x)$;
- $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

La donnée d'un ensemble X et d'une distance d sur X s'appelle un *espace métrique*.

Remarquons que *n'importe quelle* application vérifiant ces propriétés mérite le nom de distance. Sur un ensemble donné, il peut exister beaucoup de distances, parfois très différentes !

Exemple 2. La droite réelle munie de la distance

$$d(x,y) = |x - y|$$

et le plan euclidien muni de la distance

$$d(P,Q) = \mathrm{dist}_E(P,Q)$$

sont donc deux exemples d'*espaces métriques* !

Si X est un ensemble quelconque, on définit une distance sur X en posant $d(x,y) = 0$ si $x \neq y$ et $d(x,y) = 1$ si $x = y$. Cette distance est appelée *métrique discrète* sur X.

Nous pouvons alors définir dans un espace métrique la notion de convergence, en réduisant la convergence d'une suite à la convergence d'une suite de nombres réels formée à partir de la distance dont on dispose.

Définition 3. Soit $S = x_0, x_1, x_2, \ldots$ une suite d'éléments de l'espace métrique X. Nous dirons que la suite S *converge* vers l'élément x de X si la suite de réels

$$S' = d(x_0, x), d(x_1, x), d(x_2, x), \ldots$$

converge vers 0.

La suite S est *convergente* s'il existe un élément x de l'ensemble X tel que S converge vers x.

Comme précédemment, on montre qu'une suite dans un espace métrique ne peut jamais converger vers deux éléments différents de X (le lecteur intéressé pourra écrire une justification de ce fait). L'unique point de convergence d'une suite convergente sera alors appelé la *limite* de cette suite.

Je vous propose de relire l'article consacré au théorème de Brouwer, dans lequel il était brièvement question de convergence lorsque nous définissions la notion de fonction continue.

À la lumière de ceci, vous comprendrez comment il est possible de définir la notion de continuité pour une fonction définie sur un espace beaucoup plus général que l'espace ou le plan : un espace *métrique*, par exemple.