Propriétés locales
et
Propriétés globales

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)

Le 20 novembre 2007

Sans peut-être le savoir, chacun au cours de sa carrière mathématique — qu'elle date du collège ou qu'elle se soit poursuivie — a rencontré en mathématique des propriétés locales, et des propriétés globales.

1 Continuité et extrema

Rappelons-nous par exemple nos cours d'analyse, et les études de variations et de concavité des fonctions. Étant donné une fonction f qui au nombre réel x associe $f(x)$, nous nous sommes tous à un moment ou a un autre confrontés aux problèmes suivants :

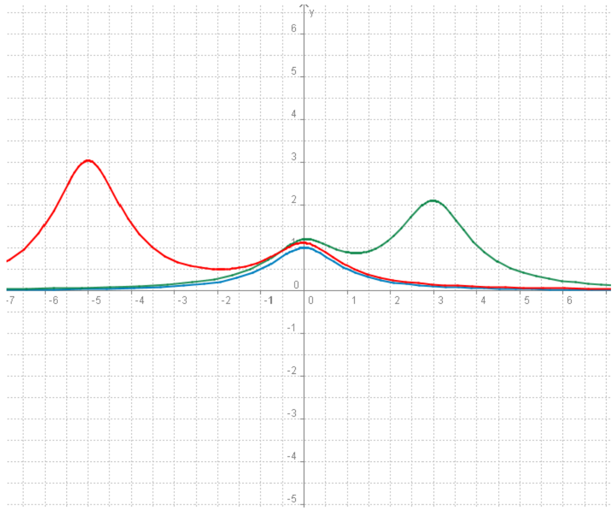
a) "La fonction f est-elle continue au point a ?"

b) "Quels sont les maxima et minima de f ?"

La première question se reformule de la manière suivante : "A-t-on $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$?" Il s'agit de vérifier si les valeurs de $f(x)$ deviennent proches de $f(a)$ lorsque x approche a.

La seconde question peut encore s'écrire : existe-t-il un nombre réel M (respectivement m) tel que l'on ait $f(x) \leqslant f(M)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(m)$) pour chaque $x \in \mathbb{R}$? En d'autres termes, on recherche, s'il existe, un point en lequel la fonction f est *maximale* (respectivement *minimale*).

Sur la figure suivante, on donne les graphes de quelques fonctions continues en chaque point de $\mathbb{R}$.



Il est à noter qu'autour de 0, le comportement des trois fonctions dont les graphes sont représentés ci-dessus est similaire. Par contre, le dessin suggère que ces trois fonctions sont maximales l'une en un point proche de -5, l'autre en un point proche de 0 et la dernière en un point proche de 1.

À la différence de la continuité, qui se vérifie en fixant un nombre réel a arbitraire et en examinant le comportement de $f(x)$ autour de a, étudier les extrema de f requiert un examen global : si l'on ne connait pas *toutes* les valeurs de $f(x)$, on ne peut décider si une fonction est maximale ou non en un point donné.

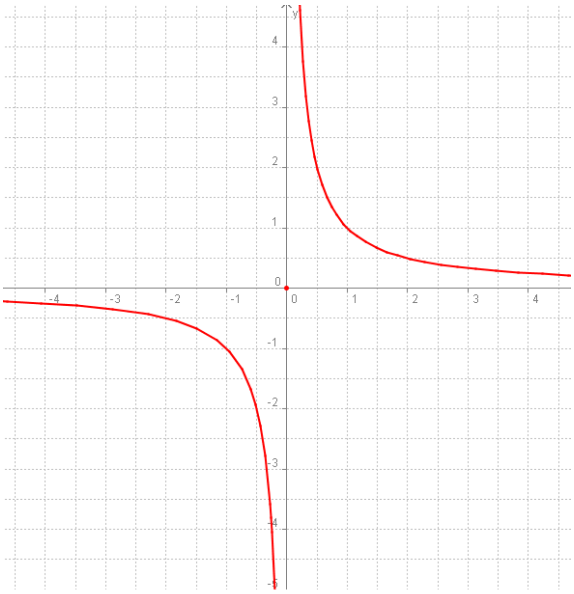
2 Existence d'extrema

Étant donné une fonction (continue) f, la question de l'existence d'extrema pour f est fondamentale. En général d'ailleurs, cette existence n'est pas garantie. Prenons la fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ (dont le graphe cartésien est la bissectrice du repère). Il est clair que f n'admet ni minimum ni maximum dans $\mathbb{R}$.

Nous devons donc revoir nos exigences. Étant donné deux réels $a < b$, nous pouvons formuler la question plus faible suivante : f admet-elle des extrema sur l'intervalle $[a, b]$ joignant a à b (il est important de noter que l'on considère ici l'intervalle $[a, b]$ en ce compris ses extrémités !) ? Ou : existe-t-il un nombre réel M (respectivement m) dans l'intervalle $[a, b]$ tel que l'on ait $f(x) \leqslant f(M)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(m)$) pour chaque x compris entre a et b ?

Ce problème plus faible admet une réponse positive. Deux choses sont à remarquer :

a) Pour que ce problème ait une réponse positive, le fait que la fonction soit continue est crucial, comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction n'admet ni minimum, ni maximum sur l'intervalle $[-1, 1]$, comme on peut le soupçonner au vu de son graphe que voici :



b) La réponse au problème de l'existence d'un maximum pour une fonction continue devient en général négative si l'on n'inclut pas à l'intervalle joignant a et b ses extrémités. Le lecteur se convaincra que la fonction f définie au point a) est continue en chaque point de $]0, 1]$ (l'intervalle joignant 0 et 1, privé de son extrémité 0). Par contre, f n'admet pas de maximum sur $]0, 1]$ (voir son graphe ci-dessus pour s'en convaincre).

C'est à Karl Weierstrass que le théorème dit “des bornes atteintes” reste attaché. Il affirme qu'étant donné deux réels $a < b$ et une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$, la fonction f admet un maximum et un minimum dans $[a, b]$.

Cette situation est typique en analyse : on déduit une propriété globale (l'existence d'un maximum ou d'un minimum pour f dans $[a, b]$) d'une notion purement locale (à savoir la continuité de f en chaque point de $[a, b]$). Ce passage du local au global nécessite une hypothèse forte sur l'ensemble sur lequel on travaille : c'est la *compacité*.