Un problème variationnel

Dans AlmaSoror

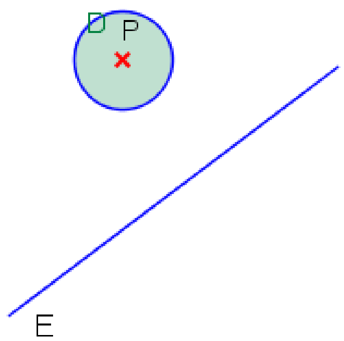
Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)

Le 20 janvier 2007

Nous allons nous intéresser, dans ce numéro de Janvier 2008, à montrer que le segment de droite est le chemin le plus court joignant deux points du plan.

1 Une question délicate : définir la longueur d'un ensemble

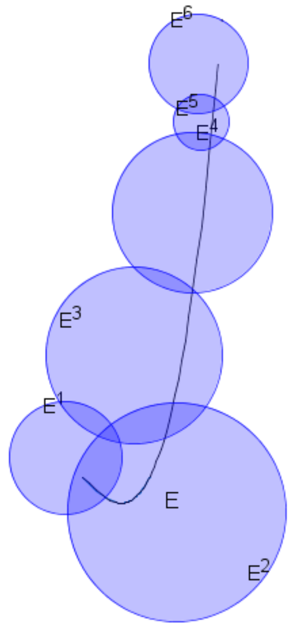
Tous les ensembles E du plan que nous considèrerons seront des ensembles *bornés* (i.e. limités, ne partant pas à l'infini) et seront tels que l'ensemble $\complement E$ des points du plan qui n'appartiennent pas à E soit *ouvert*, i.e. chaque point de $\complement E$ est contenu dans un disque entièrement contenu dans $\complement E$. Sur la figure suivante, le point P, situé hors de E, est contenu dans un disque, lui même entièrement hors de E.



Intéressons-nous à définir la *longueur* $\ell(E)$ d'un ensemble E du plan.

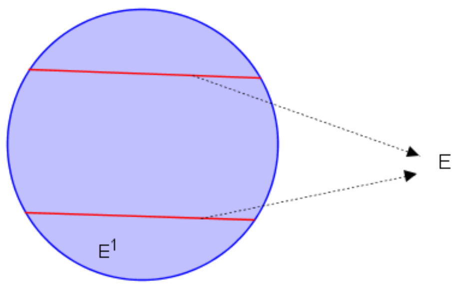
Appelons *diamètre* de E la plus grande distance possible entre deux points de E. Lorsque E est un disque, on retrouve le diamètre habituel.

Une première idée serait la suivante : couvrons E par des ensembles $E^1, E^2, \ldots, E^m$ et calculons la somme $d^1 + d^2 + \cdots + d^m$ des diamètres $d^1, d^2, \ldots, d^m$ des ensembles $E^1, E^2, \ldots, E^m$.



Nous aurions envie d'appeler longueur de E la plus grande valeur qui soit toujours inférieure à la somme $d^1 + d^2 + \cdots + d^m$ des diamètres $d^1, d^2, \ldots, d^m$ des ensembles $E^1, E^2, \ldots, E^m$, lorsque ces derniers constituent un recouvrement de E.

Malheureusement, si nous considérons un ensemble E constitué de deux segments, comme ci-dessous,



En appliquant la procédure précédente, nous obtiendrions que la 'longueur' de l'ensemble E constitué des deux segments rouges serait inférieure au diamètre du disque E^1, la longueur de l'union de deux segments ne serait alors pas la somme des longueurs de chacun des segments.

Pour remédier à ce problème, nous prendrons une précaution supplémentaire :

a) Pour chaque nombre positif δ fixé, nous appellerons $\ell_\delta(E)$ (longueur à l'échelle δ de E) la plus grande valeur qui soit toujours inférieure à la somme $d^1 + d^2 + \cdots + d^m$ des diamètres $d^1, d^2, \ldots, d^m$ des ensembles $E^1, E^2, \ldots, E^m$, lorsque ces derniers constituent un recouvrement de E *et que chacun des ensembles* $E^1, E^2, \ldots, E^m$ *a un diamètre inférieur à* δ.

b) Ensuite, nous appelons *longueur de* E la limite de $\ell_\delta(E)$ lorsque δ s'approche de 0 :

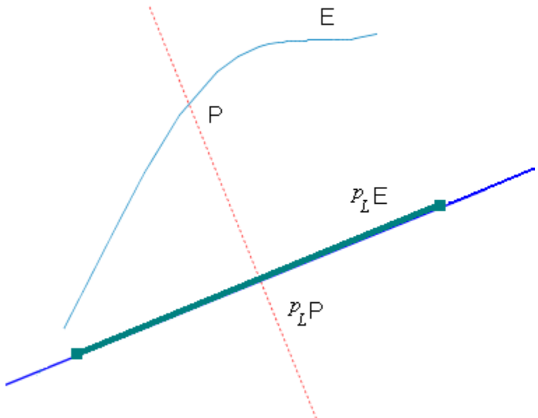
$$\ell(E) = \lim_{\delta \to 0} \ell_\delta(E).$$

Ainsi, pour δ suffisamment petit, le disque E^1 représenté ci-dessus ne constituera plus un recouvrement acceptable pour calculer la longueur à l'échelle δ de l'union des deux segments disjoints en rouge sur la figure précédente.

On montre alors facilement que si l'ensemble F du plan contient l'ensemble E, alors $\ell(E) \leqslant \ell(F)$.

2 Longueur et projection

Fixons L une droite, et E un ensemble quelconque du plan. Désignons par p_L la projection orthogonale sur la droite L, envoyant le point P (et l'ensemble E) sur sa projection $p_L P$ (resp. $p_L E$) comme suit.

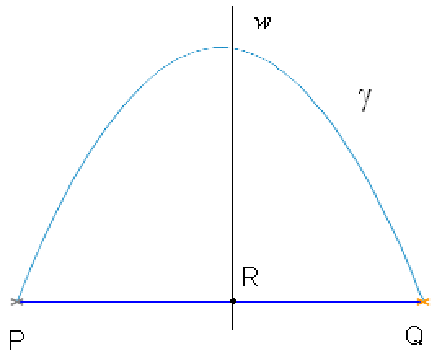


Si $E^1, E^2, \ldots, E^m$ constituent un recouvrement de E, alors les projections orthogonales $p_L E^1, p_L E^2, \ldots, p_L E^m$ de $E^1, E^2, \ldots, E^m$ sur la droite L constituent un recouvrement de la projection orthogonale de E sur la droite L, en outre les diamètres $\delta^1, \delta^2, \ldots, \delta^m$ de $p_L E^1, p_L E^2, \ldots, p_L E^m$ sont plus petits que les diamètres $d^1, d^2, \ldots, d^m$ de $E^1, E^2, \ldots, E^m$ respectivement (la projection orthogonale sur L diminue les longueurs).

En conséquence, la longueur du projeté $p_L E$ de E sur L est toujours inférieure à la longueur de E :

$$\ell(p_L E) \leqslant \ell(E).$$

Appelons *chemin* reliant deux points $P \neq Q$ du plan toute courbe *continue* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{P}$ associant à chaque nombre compris entre 0 et 1 un point $\gamma(t)$ du plan $\mathbb{P}$ et vérifiant $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$.



Si, en un point R du segment $[PQ]$ joignant P à Q, nous traçons une droite w perpendiculaire à $[PQ]$ en R, cette droite rencontre la courbe γ en au moins un point.

Cela signifie en particulier que si l'on projette la courbe γ sur la droite $L = PQ$, l'ensemble projeté $p_L\gamma$ contiendra nécessairement le segment $[PQ]$; on a dès lors

$$\ell([PQ]) \leqslant \ell(p_L\gamma) \leqslant \ell(\gamma).$$

En particulier, nous venons de montrer que **parmi toutes les courbes continues reliant P à Q, le segment $[PQ]$ est de longueur la plus petite possible**.

Sur ce joli résultat, je souhaite à la rédaction et aux lecteurs d'AlmaSoror une excellente année 2008, en facteurs premiers :

$$2^3 \cdot 251!$$