# Un théorème d'Hermann Weyl

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
`moonens@math.ucl.ac.be`

Le 20 juin 2007

Pour cette page du mois de juin, nous proposons d'illustrer un théorème de théorie des nombres dû au mathématicien Hermann Weyl (1885-1955).

## 1 Nombres réels

Un *nombre réel* $x$ possède une écriture décimale

$$x = 2566633,3676398262787991\ldots,$$

qui peut être illimitée.

Un nombre *rationnel* $x$ est un nombre réel tel qu'il existe deux entiers $p$ et $q$ pour lesquels on peut écrire

$$x = \frac{p}{q}.$$

Un nombre rationnel peut donc s'écrire sous forme d'une fraction. En particulier, on peut supposer cette fraction irréductible et faire l'hypothèse que $p$ et $q$ n'ont aucun diviseur commun autre que $1$. Les nombres rationnels sont caractérisés par des écritures décimales périodiques, i.e. limitées ou éventuellement illimitées lorsqu'un groupe de chiffres décimaux est répété à l'infini. Par exemple,

$$0,333333\ldots \quad \text{et} \quad 0,23467538245454545\ldots$$

Certains nombres réels sont *irrationnels* dans le sens où il ne s'écrivent pas sous la forme d'une fraction. Par exemple, on peut démontrer l'existence d'un nombre réel positif noté $\sqrt{2}$ qui vérifie

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$$

Imaginons que l'on puisse écrire

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

où $p$ et $q$ n'ont aucun diviseur commun autre que $1$. En élevant au carré les deux membres de l'égalité précédente, on trouve

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ou encore} \quad 2q^2 = p^2.$$

En particulier, l'entier $p^2$ est pair. Comme le carré d'un nombre impair est impair, cela signifie également que $p$ est lui-même pair. Mais, $p$ étant pair, $p^2$ est lui divisible par $2^2 = 4$. Dès lors $p^2 = 2q^2$ doit être divisible par $4$. Cela signifie que $q^2$ est divisible par $2$, i.e. $q^2$ est pair et il en va de même pour $q$. En résumé $p$ et $q$ sont tous deux pairs et contrairement à notre hypothèse $p$ et $q$ ont $2$ pour diviseur commun. Il était donc absurde de supposer que $\sqrt{2}$ pouvait s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible : $\sqrt{2}$ est un nombre *irrationnel* !

Nous venons de montrer que l'on peut classer les nombres réels en deux catégories : nombres rationnels et nombres irrationnels.

## 2 Le cercle

Nous désignerons par $\mathscr{C}$ le cercle où chaque point est repéré par un nombre réel compris entre $0$ et $1$ exclus qui représente la portion de tour effectuée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, depuis le pôle est noté $E$. Ainsi, au point $E$ sera associé le nombre $0$, au point $X$ du cercle sera associé le nombre $x = 0,25$ puisqu'il est obtenu en déplaçant le point $E$ d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et au point $Y$ sera associé le nombre réel $y = 0,5$ (voir figure 1).

Inversement, étant donné un nombre réel $x$, la partie décimale de $x$ sera notée $x \mod 1$. Par exemple,

$$2,3455 \mod 1 = 0,3455 \quad \text{et} \quad 1 \mod 1 = 0.$$

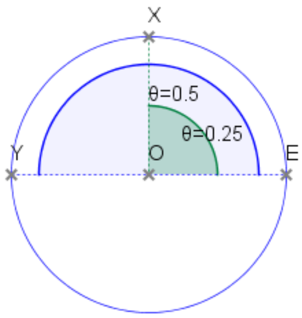


FIG. 1 – Le cercle $\mathscr{C}$

La partie décimale de $x$ est alors associée à un point sur le cercle via l'identification décrite plus haut.

## 3 Distribution uniforme sur le cercle

Considérons une suite $x_1, x_2, x_3 \dots$ de nombres réels et les points $P_1, P_2, P_3 \dots$ sur le cercles associés aux nombres $\theta_1 = x_1 \mod 1$, $\theta_2 = x_2 \mod 1$, $\theta_3 = x_3 \mod 1$ etc.

*Par exemple, choisissons un réel $\theta$ entre $0$ et $1$ exclus et définissons $x_1 = \theta$, $x_2 = 2\theta$, $x_3 = 3\theta$ etc. La situation est représentée à la figure 2.*

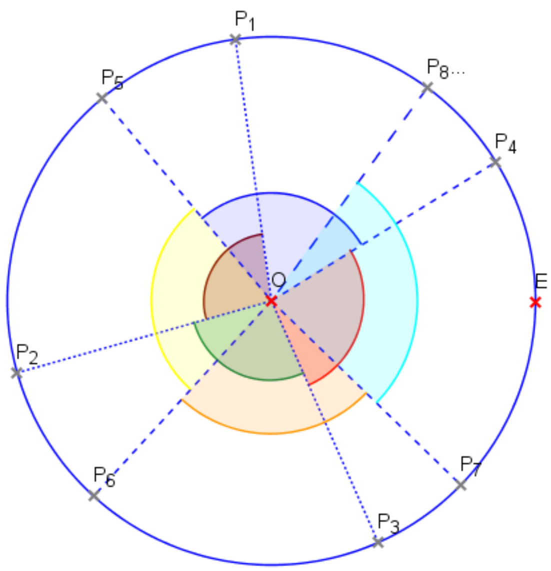


FIG. 2 – La suite $P_1, P_2, P_3, \dots$

Deux situations sont alors envisageables.

– Dans la première situation, après un nombre fini d'étapes, disons $N$, le point $P_N$ revient sur $P_1$ :

$$x_1 \mod 1 = x_N \mod 1.$$

*Dans le cas de notre exemple, cette situation se produit lorsque le nombre $\theta$ de départ est rationnel. En effet, si $\theta = \frac{p}{q}$ pour des entiers $p < q$, alors après $q$ étapes, on a $x_{q+1} = (q+1) \cdot \frac{p}{q} = p + \frac{p}{q}$ et $x_{q+1} \mod 1 = \frac{p}{q} = \theta_1$ puisque $p$ est un nombre entier.*

– Dans la seconde situation, les points $P_1, P_2, P_3 \dots$ s'enroulent autour du cercle sans que la suite ne se stabilise.
*Dans le cas de notre exemple, cela se produit lorsque $\theta$ est irrationnel.*

Etant donné deux nombres réels $0 \leqslant \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqslant 1$ et un entier $N$ la quantité $\mathscr{I}_N(\vartheta_1, \vartheta_2)$ désignera le nombre de points parmi $P_1, P_2, P_3, \dots, P_N$ pour lesquels on a

$$\vartheta_1 \leqslant \theta_j < \vartheta_2.$$

Nous dirons que la suite $x_1, x_2, x_3 \dots$ est *uniformément distribuée* sur le cercle si la quantité

$$\frac{\mathscr{I}_N(\vartheta_1, \vartheta_2)}{N}$$

devient comparable à la différence $\vartheta_2 - \vartheta_1$ lorsque $N$ tend vers l'infini, et ce *pour tout choix* de nombres $0 \leqslant \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqslant 1$ ; on écrit :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\mathscr{I}_N(\vartheta_1, \vartheta_2)}{N} = \vartheta_2 - \vartheta_1.$$

Comme la différence $\vartheta_2 - \vartheta_1$ représente en fait la fraction du cercle déterminée par $\vartheta_1$ et $\vartheta_2$, dire que $x_1, x_2, x_3 \dots$ est uniformément distribuée sur le cercle revient à dire que les points associés $P_1, P_2, P_3 \dots$ se répartissent "équitablement" sur le cercle.

*Dans le cas de notre exemple, on peut démontrer que la suite $x_1 = \theta, x_2 = 2\theta, x_3 = 3\theta, \dots$ est uniformément distribuée sur le cercle lorsque $\theta$ est irrationnel.*

*Si $\theta$ est rationnel, par contre, la suite $x_1, x_2, x_3 \dots$ de notre exemple n'est jamais uniformément distribuée (certaines zones du cercle ne contiennent aucun point de la suite). Ce phénomène est illustré à la figure 3. Pour certains $0 \leqslant \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqslant 1$ on a $\mathscr{I}_N(\vartheta_1, \vartheta_2) = 0$ quel que soit $N$ et il vient*

$$0 < \vartheta_2 - \vartheta_1 \neq \lim_{N \to \infty} \frac{\mathscr{I}_N(\vartheta_1, \vartheta_2)}{N} = 0.$$

*Il s'ensuit que la suite $x_1, x_2, x_3 \ldots$ ne peut être uniformément distribuée.*

Il est à remarquer que l'argument esquissé dans le paragraphe précédent permet aussi de montrer que toute suite uniformément distribuée est *dense* sur le cercle : dès que la suite $x_1, x_2, x_3 \ldots$ est uniformément distribuée sur le cercle, alors étant donné une région du cercle déterminée par les nombres $0 \leqslant \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqslant 1$, il existe nécessairement une étape $N$ à laquelle le point $P_N$ rencontre cette région du cercle.

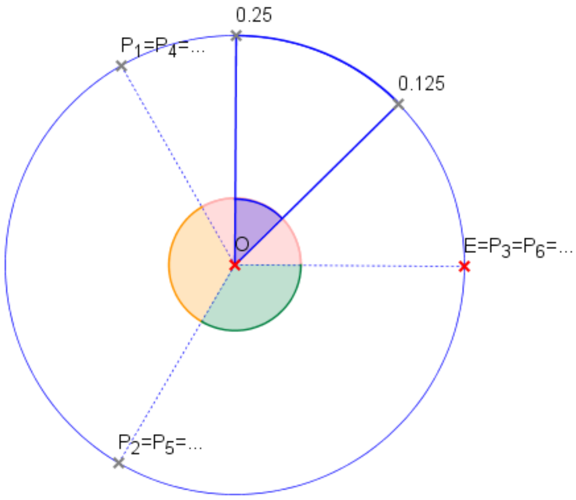


FIG. 3 – La suite $P_1, P_2, P_3, \ldots$ associée à $\theta = 1/3$ ne rencontre jamais la zone bleue comprise entre $\vartheta_1 = 0.125$ (correspondant à un huitième de tour) et $\vartheta_2 = 0.25$ (correspondant à un quart de tour).

Le critère de Weyl va nous donner un moyen analytique de vérifier si une suite $x_1, x_2, x_3 \ldots$ est uniformément distribuée.

## 4 Le critère de Weyl

Donnons-nous une suite de nombres réels $x_1, x_2, x_3 \ldots$ et formons, pour $N$ un entier positif et $k$ un entier non nul (positif ou négatif), les expressions

$$S_N^k = \frac{\sin(2k\pi x_1) + \sin(2k\pi x_2) + \cdots + \sin(2k\pi x_N)}{N}$$

et

$$C_N^k = \frac{\cos(2k\pi x_1) + \cos(2k\pi x_2) + \cdots + \cos(2k\pi x_N)}{N}.$$

Le *critère de Weyl* (démontré par Hermann Weyl en 1914) affirme alors que la suite $x_1, x_2, x_3 \ldots$ est uniformément distribuée sur le cercle si et seulement si $S_N^k$ et $C_N^k$ tendent vers $0$ lorsque $N$ tend vers l'infini, quel que soit l'entier non nul $k$. On écrit cela :

$$\lim_{N\to\infty} S_N^k = \lim_{N\to\infty} C_N^k = 0 \quad \text{pour tout entier } k \neq 0.$$

L'uniforme distribution de la suite $x_1, x_2, x_3 \ldots$ sera donc établie dès que l'on aura pu établir la nullité des limites précédentes : nous avons ramené notre problème de *distribution* sur le cercle au calcul d'une série de limites (le calcul de ces limites s'avère souvent complexe !).

Il est instructif de revenir à notre exemple histoire d'illustrer le critère de Weyl et la technicité de l'estimation des limites qu'il implique.

*Le réel $\theta$ est compris entre $0$ et $1$ exclus et on pose comme précédemment $x_1 = \theta$, $x_2 = 2\theta$, $x_3 = 3\theta$ etc. En particulier, on trouve pour $k \neq 0$ un entier :*

$$S_N^k = \frac{\sin(\alpha_k) + \sin(2\alpha_k) + \cdots + \sin(N\alpha_k)}{N}$$

*et*

$$C_N^k = \frac{\cos(\alpha_k) + \cos(2\alpha_k) + \cdots + \cos(N\alpha_k)}{N}$$

*où l'on a posé $\alpha_k = 2k\pi\theta$.*

*Les identités de Lagrange, valables pour $\alpha$ non multiple entier de $2\pi$ se démontrent dans le cadre de la théorie des nombres complexes et s'écrivent :*

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin N\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left[(2N+1)\frac{\alpha}{2}\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos N\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\alpha}{2}\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

*On en déduit en particulier*

$$|\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin N\alpha| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

*ainsi que*

$$|\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos N\alpha| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

*Lorsque $\theta$ est irrationnel, $\alpha_k$ ne sera un multiple entier de $2\pi$ pour aucun entier $k \neq 0$. Appliquées à $\alpha = \alpha_k$, $k > 0$, les inégalités précédentes permettent alors d'écrire*

$$|S_N^k| \leqslant \frac{1}{N\sin\frac{\alpha_k}{2}} \quad \textit{et} \quad |C_N^k| \leqslant \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N\sin\frac{\alpha_k}{2}}$$

*et d'affirmer*

$$\lim_{N\to\infty} S_N^k = \lim_{N\to\infty} C_N^k = 0.$$

*Le critère de Weyl assure donc l'uniforme distribution de la suite $x_1, x_2, x_3 \ldots$ sur le cercle.*

En réalité, le critère de Weyl permet de montrer qu'étant donné une suite quelconque $a_1, a_2, a_3 \ldots$ d'entiers distincts deux à deux, la suite

$$a_1\theta, a_2\theta, a_3\theta \ldots$$

est uniformément distribuée sur le cercle pour "presque tous" les irrationnels $\theta$ compris entre 0 et 1 exclus !

## 5 Conclusion

La théorie de l'uniforme distribution sur le cercle, souvent appelée uniforme distribution modulo $1$, se situe au confluent de nombreux domaines des mathématiques : théorie des nombres, analyse réelle, analyse complexe, analyse fonctionnelle, probabilités.

La théorie est si riche que l'exposé des concepts de base de cetté théorie, dressé avec talent par L. Kuipers et H. Niederreiter [1], représente un traité de 350 pages utile aussi bien au probabiliste qu'au chercheur en analyse ou en mathématiques appliquées.

Pour conclure, signalons que les figures ont été réalisées avec le logiciel `GEONExT`, dont je salue la gratuité et l'efficacité.

## Références

[1] L. Kuipers & H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences.* Dover Publications, Mineola (New York), 2006 (reprint of the 1974 edition).