L'escalier du diable de Cantor

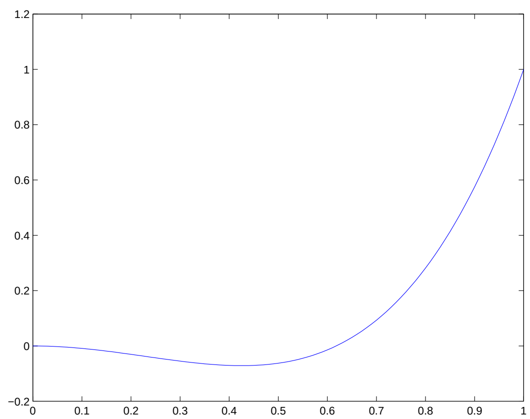
Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)

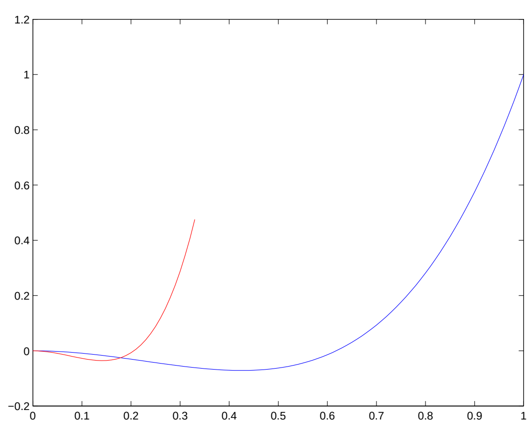
Le 20 décembre 2007

Nous proposons, sous le sapin des lecteurs d'AlmaSoror, l'*escalier du diable* qui joue un rôle central dans bien des domaines des mathématiques.

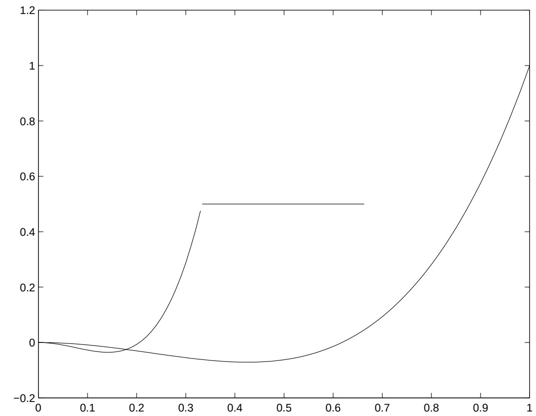
Pour commencer, donnons-nous une fonction continue f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ joignant 0 à 1, qui envoie 0 sur 0 (i.e. vérifiant $f(0) = 0$) et 1 sur 1 (i.e. vérifiant $f(1) = 1$), comme l'illustre la figure suivante :



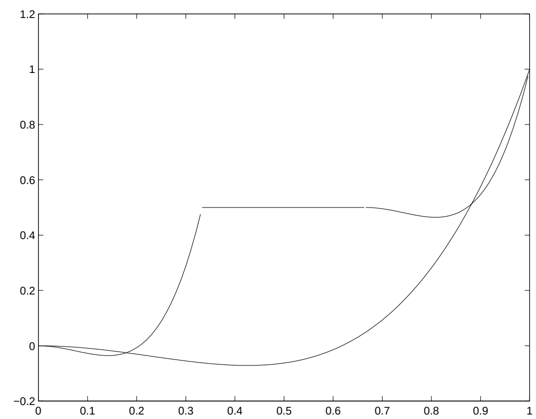
La procédure suivante va nous permettre de construire, à partir de f, une nouvelle fonction g. D'abord, compressons le graphe de f pour le ramener dans le coin inférieur gauche en effectuant sur le graphe de f une transformation qui divise les abscisses par 3 et les ordonnées par 2 :



Ensuite, traçons une ligne horizontale au dessus du tiers milieu de l'intervalle $[0, 1]$, pour obtenir le graphe suivant :

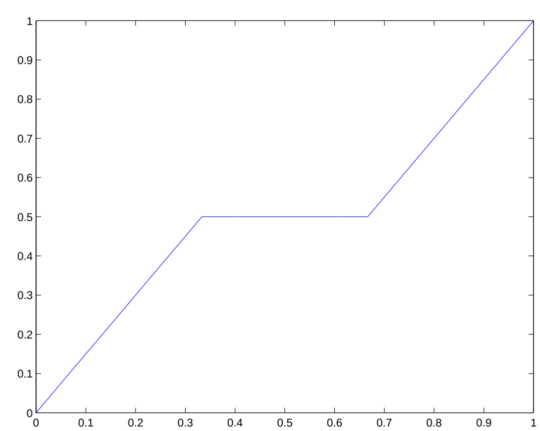


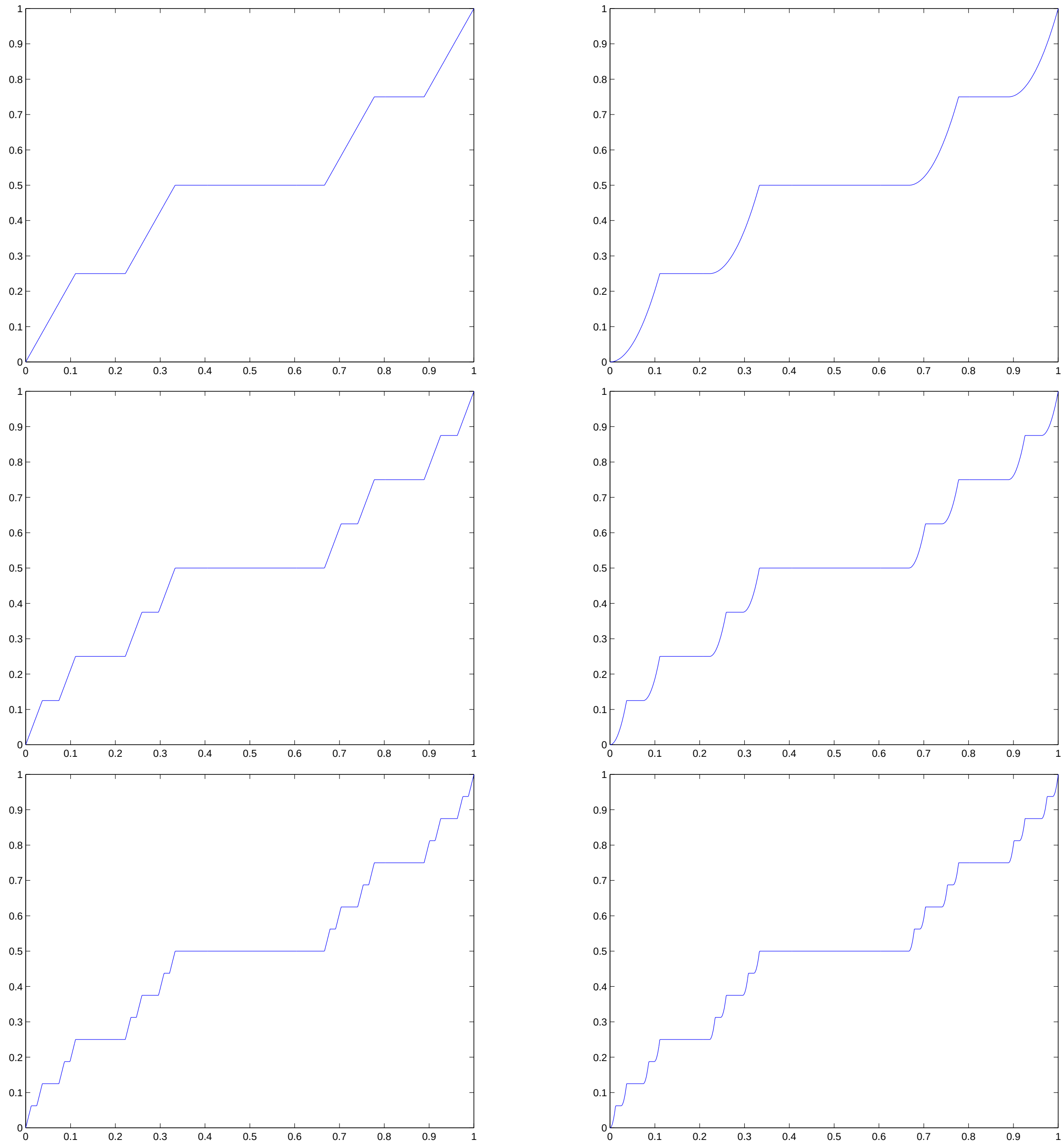
Finalement, amenons au point d'abscisse $2/3$ et d'ordonnée $1/2$ le graphe obtenu par compression lors de la première étape :



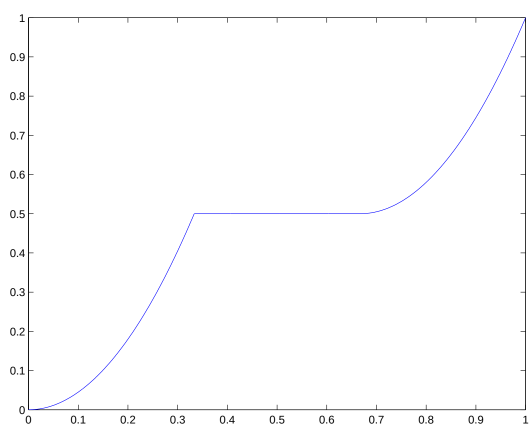
Après cette trinité d'étapes, nous obtenons le graphe d'une fonction g, continue sur $[0, 1]$, envoyant 0 et 1 sur 0 et 1 respectivement.

Rien ne nous empêche donc d'appliquer à nouveau la même construction à la fonction g. Voici ce que fournit ce processus lorsque l'on part de la fonction identique $f(x) = x$:





Si nous partons plutôt de la fonction $f(x) = x^2$, nous obtenons les itérées suivantes :



Après une infinité d'étapes, on peut montrer que la construction précédente livre une fonction continue sur $[0, 1]$ fixant 0 et 1.

Mieux que cela : quelle que soit la fonction $f(x)$ dont on part, la construction précédente livre la même fonction, appelée *escalier du diable*.

Par ailleurs, l'ensemble des points autour desquels cette fonction n'est pas constante semble contenir peu de points : en fait, la probabilité qu'un point de l'intervalle $[0, 1]$ appartienne à cet ensemble est nulle !

Cet ensemble 'improbable' est un *fractal* et est appelé l'ensemble de Cantor.