Un autre exemple de nombre irrationnel : le nombre e
Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)

Le 20 octobre 2007

À l'occasion de plusieurs numéros d'AlmaSoror, nous avons mentionné — parfois avec justification, parfois sans — quelques nombres irrationnels, i.e. qui ne s'obtiennent par par division d'un entier par un autre entier non nul.

Le nombre e, base des logarithmes *népériens*, est un exemple de tel nombre. Nous proposons d'en donner une courte preuve, dûe à L.L. PENNISI [1].

1 Le nombre e

Intéressons nous d'abord à donner une définition du nombre réel e. Pour ce faire, commençons par définir, pour chaque entier $n = 1, 2, 3, \dots$, le nombre entier

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1,$$

souvent appelé la *factorielle* de n. Par convention, on pose aussi $0! = 1$. On a donc $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ etc.

Pour chaque entier $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, construisons alors le nombre réel

$$e_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \tag{1}$$

Pour les premières valeurs de n (de 0 à 10), un logiciel de calcul symbolique nous donne les valeurs approchées suivantes pour e_n :

e_0	1	e_6	2.7180556
e_1	2	e_7	2.718254
e_2	2.5	e_8	2.7182788
e_3	2.6666667	e_9	2.7182815
e_4	2.7083333	e_{10}	2.7182818
e_5	2.7166667		

Comme la simulation précédente le suggère, on peut montrer que les nombres e_n se rapprochent indéfiniment, lorsque n augmente, d'un nombre réel appelé e, dont l'écriture décimale commence par 2.7182818 : on dit que e est la limite de e_n lorsque n tend vers l'infini, et on écrit

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n = 2.718281\dots.$$

Si nous alternons les signes dans l'équation (1), en définissant pour chaque $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ le nombre réel e'_n par la formule

$$e'_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}$$

où $\pm$ représente le signe $+$ lorsque n est pair, et le signe $-$ dans le cas où n est impair. Une autre simulation numérique nous fournit les valeurs suivantes pour e'_n (n entre 0 et 10) :

e'_0	1	e'_6	0.3680556
e'_1	0	e'_7	0.3678571
e'_2	0.5	e'_8	0.3678819
e'_3	0.3333333	e'_9	0.3678792
e'_4	0.375	e'_{10}	0.3678795
e'_5	0.3666667		

Notons que l'on obtient

$$2.7182818 \times 0.3678795 \simeq 1,0000001.$$

Ceci ne traduit pas un fait du hasard : on peut montrer que la suite $e'_0, e'_1, e'_2, e'_3, \dots$ se rapproche indéfiniment du nombre réel $1/e$ (l'inverse de e). On écrit

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} e'_n = e_n = 0.3678794\dots.$$

2 Le nombre e est irrationnel

Pour montrer que le nombre e ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers, procédons par l'absurde et supposons qu'au contraire, on puisse trouver deux entiers p et q non nuls pour lesquels

$$e = \frac{p}{q} \tag{2}$$

c.-à-d. que e s'obtient par division de l'entier p par l'entier q. Alors, le nombre réel $1/e$, inverse de e, s'écrira simplement

$$\frac{1}{e} = \frac{q}{p}$$

qui est aussi un quotient d'entiers. Écrivons

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{p!}$$
$$\mp \frac{1}{(p+1)\times p!} \pm \frac{1}{(p+1)\times(p+2)\times p!} \pm \dots$$

avec les conventions de signes évidentes. En multipliant de part et d'autre cette égalité par $p!$, nous trouvons

$$\frac{p!}{e} = \frac{p!}{0!} - \frac{p!}{1!} + \frac{p!}{2!} - \frac{p!}{3!} + \cdots \pm \frac{p!}{p!} \mp \frac{p!}{(p+1)\times p!} \pm \frac{p!}{(p+1)\times(p+2)\times p!} \pm \ldots \quad (3)$$

Il est à remarquer que le membre de gauche de (3) s'écrit aussi

$$\frac{p!}{e} = p! \times \frac{1}{e} = p \times (p-1)! \times \frac{q}{p} = (p-1)! \times q.$$

Il s'agit donc d'un nombre entier. D'autre part, la somme

$$\frac{p!}{0!} - \frac{p!}{1!} + \frac{p!}{2!} - \frac{p!}{3!} + \cdots \pm \frac{p!}{p!}$$

des p premiers termes du membre de droite de (3) est une somme de nombres entiers, puisques les factorielles de 0,1,2,..., p divisent toutes la factorielle de p. En conséquence, la somme des termes restants

$$\mp \frac{p!}{(p+1)\times p!} \pm \frac{p!}{(p+1)\times(p+2)\times p!} \pm \ldots = \mp \frac{1}{p+1} \pm \frac{1}{(p+1)\times(p+2)} \mp \ldots \quad (4)$$

doit être un nombre entier. Or on a

$$\frac{1}{p+1} > \frac{1}{(p+1)(p+2)} > \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} > \ldots$$

En particulier, en rajoutant $1/(p+1)(p+2)(p+3)$ à la différence

$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)(p+2)},$$

on obtiendra un nombre plus grand que cette différence, mais qui n'égalera pas $\frac{1}{p+1}$. De la même façon, en retranchant du résultat obtenu $1/(p+1)(p+2)(p+4)$, on obtiendra un nombre inférieur à $1/(p+1)$ et toujours supérieur à

$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)(p+2)}.$$

En continuant de proche en proche, il s'ensuit que la somme (infinie)

$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)} - \frac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} + \ldots,$$

sera comprise entre $1/(p+1)$ et $1/(p+1) - 1/(p+1)(p+2)$. Comme il n'existe aucun entier compris entre ces deux nombres, il est impossible que la somme (4) soit entière. Contradiction. L'hypothèse de départ faite sur e — c.-à-d. l'existence d'entiers p et q vérifiant (2) — était absurde.

Références

[1] L.L. Pennisi, *Elementary Proof that e is Irrational*, American Mathematical Monthly, 1953.