L'intégrale de Riemann-Stieltjes
ou
Fonctions à variation bornée (II)

Dans le journal d'AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.R.S.-FNRS (Belgique)

Le 20 juin 2008

Dans ce numéro de juin, on s'intéresse d'abord à une définition de l'intégrale de Riemann-Stieltjes qui est une modification, formellement simple, de l'intégrale de Riemann permettant de formaliser la notion de *moyenne pondérée* d'une quantité continue.

Nous ferons ensuite le lien entre l'intégration à la Riemann-Stieltjes et les fonctions à variation bornée introduites dans le numéro précédent. Nous achèverons ainsi un feuilleton mathématique haletant commencé en Mai. Ainsi, les lecteurs du journal d'AlmaSoror n'auront pas à souffrir — en plus du climat tropical — d'un suspense insoutenable.

1 Valeur moyenne d'une quantité continue

Dans la suite, la fonction continue $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0,1]$ désignera une *quantité variable* (par exemple, la température en un point de la Terre en fonction du temps).

Il est naturel de se poser la question suivante : connaissant la valeur $f(x)$ pour chaque $0 \leqslant x \leqslant 1$, comment définir et calculer la *valeur moyenne* de cette quantité entre 0 et 1.

La difficulté dans ce problème est qu'on ne dispose pas d'un *nombre fini* de valeurs de $f(x)$ mais bien d'un *continuum infini* de valeurs (la température en un point de la Terre peut a priori être mesurée à n'importe quel instant).

Continuons sur l'exemple d'une fonction $T(t)$ qui représenterait la température à Paris, au sommet de la tour Eiffel, le 20 juin 2008 au temps $0 \leqslant t \leqslant 1$ (ce nombre réel t désignant la fraction de la journée du 20 juin 2008 écoulée depuis minuit). Pour calculer la température moyenne ce jour-là, il est naturel de suivre la procédure suivante : toutes les heures, de minuit à 23 heures, mesurons la température. Ensuite, sommons ces 24 mesures de température $T(0)$,$T(1/24)$,$T(1/12)$,..., $T(23/24)$ et calculons la moyenne arithmétique

$$\bar{T}_{\text{heures}} := \frac{1}{24} \sum_{j=0}^{23} T\left(\frac{j}{24}\right).$$

Le nombre $\bar{T}_{\text{heures}}$ devrait rendre compte de la valeur moyenne de la température ce jour-là.

Cependant, la procédure suivante pourrait être plus précise : mesurons la température au même endroit toutes les 10 minutes de minuit à 23 heures 50 minutes (ce qui correspond à $144 = 6 \times 24$ mesures successives) et calculons la moyenne arithmétique

$$\bar{T}_{\text{minutes}} := \frac{1}{144} \sum_{j=0}^{143} T\left(\frac{j}{144}\right).$$

On a bien entendu envie d'accorder plus de crédit à cette nouvelle moyenne calculée avec des mesures plus fréquentes.

Le lecteur le plus fidèle du journal d'AlmaSoror aura déja deviné que cette entrée en matière pourrait bien cacher un *passage à la limite* fructueux. En effet, nous pouvons, plus généralement, prendre N mesures de la température toutes les $N/24$ heures et en calculer la moyenne arithmétique

$$\bar{T}_N := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} T\left(\frac{j}{N}\right).$$

Ensuite, on peut montrer que la limite

$$\bar{T} := \lim_{N\to\infty} \bar{T}_N$$

existe, i.e. que la moyenne arithmétique $\bar{T}_N$ s'approche arbitrairement d'une valeur moyenne limite $\bar{T}$.

Le lecteur averti aura remarqué que les sommes $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} T\left(\frac{j}{N}\right)$ sont en fait les *sommes de Riemann* utilisées pour définir l'intégrale $\int_0^1 T(t)\,dt$ de la fonction $T(t)$ (voir le numéro de Septembre 2006). Ceci signifie qu'il serait bien raisonnable de définir la *température moyenne* le 20 juin 2008 comme *l'intégrale définie*

$$\bar{T} := \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Revenant à une fonction arbitraire $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0,1]$ ceci nous amène à la définition suivante : la *valeur moyenne* $\bar{f}(0,1)$ de f entre 0 et 1 est la valeur de l'intégrale

$$\bar{f}(0,1) := \int_0^1 f(x)\,dx.$$

2 Moyennes pondérées

Dans la suite, nous allons fixer une fonction F définie sur l'intervalle $[0,1]$ et à valeurs réelles.

Étant donné une fonction f continue sur l'intervalle $[0,1]$, on peut penser aux moyennes pondérées

$$\bar{f}_N(0,1;F) := \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right)\left[F\left(\frac{j+1}{N}\right) - F\left(\frac{j}{N}\right)\right]$$

qui sont calculées en *pondérant* $f(j/N)$ par le nombre $F\left(\frac{j+1}{N}\right) - F\left(\frac{j}{N}\right)$ qui coïncidera avec l'usuel $1/N$ lorsque F est la fonction identique $F(x) = x$.

Étudier la moyenne pondérée par F de la quantité continue f revient à étudier l'existence de la limite

$$\bar{f}(0,1;F) := \lim_{N\to\infty} \bar{f}_N(0,1;F).$$

Donnons deux exemples instructifs.

Exemple 1. Si la fonction F est dérivable, et que sa dérivée F' est continue, observons que le théorème de la moyenne (voir l'article de Septembre 2006) garantit que l'on peut écrire pour chaque $0 \leqslant j \leqslant N-1$

$$F\left(\frac{j+1}{N}\right) - F\left(\frac{j}{N}\right) = F'(c_j)\left(\frac{j+1}{N} - \frac{j}{N}\right) = \frac{1}{N}F'(c_j)$$

où c_j est un point compris entre j/N et $(j+1)/N$. Lorsque N grandit, nous obtenons

$$\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right)\left[F\left(\frac{j+1}{N}\right) - F\left(\frac{j}{N}\right)\right] \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) F'\left(\frac{j}{N}\right)$$

puisque F' est continue et que $F'(c_j) \simeq F'(j/N)$. On reconnaît dans la dernière expression la $N^{\text{ième}}$ somme de Riemann de la fonction $x \mapsto f(x)F'(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Dès lors, la limite

$$\bar{f}(0,1;F) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) F'\left(\frac{j}{N}\right)$$

est simplement la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)F'(x)\,dx.$$

En particulier, ce raisonnement garantit l'existence de la moyenne pondérée $\bar{f}(0,1;F)$ lorsque F est dérivable et que sa dérivée est une fonction continue.

Exemple 2. Prenons maintenant une fonction F très simple, mais non continue, définie par $F(x) = 0$ lorsque $0 \leqslant x < 1/2$ et par $F(x)$ lorsque $1/2 \leqslant x \leqslant 1$. Il est clair que pour chaque entier N et chaque $0 \leqslant j \leqslant N-1$, la différence

$$F\left(\frac{j+1}{N}\right) - F\left(\frac{j}{N}\right)$$

est nulle *à moins que* l'on ait $j/N < 1/2 \leqslant (j+1)/N$ ce qui se produit à chaque étape N pour *un seul* entier $0 \leqslant j_N \leqslant N-1$; dans ce cas cette différence égale l'unité. En conclusion, on peut écrire

$$\bar{f}_N(0,1;F) = f\left(\frac{j_N}{N}\right).$$

Or, par le choix de j_N on trouve $\lim_{N\to\infty} \frac{j_N}{N} = 1/2$ puisque l'on a

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{j_N}{N} \leqslant \frac{1}{N}$$

pour chaque entier N. En conséquence, on déduit de la continuité de la fonction f que

$$\bar{f}(0,1;F) = \lim_{N\to\infty} f\left(\frac{j_N}{N}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Dans le cas où la moyenne pondérée $\bar{f}(0,1;F)$ est bien définie (i.e. que la limite $\lim_N \bar{f}_N(0,1;F)$ existe) nous la noterons, pour rappeler son mode de construction,

$$\int_0^1 f(x)\,dF(x)$$

et nous l'appellerons l'*intégrale de Riemann-Stieltjes* de f par rapport à F.

Comme nous venons de le voir, l'intégrale d'une fonction continue par rapport à une fonction F peut exister sans que F soit continue. Le résultat suivant fait le lien avec les fonctions à variation bornée (voir le numéro de Mai 2008).

Théorème 1. *Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ et si F est à variation bornée sur $[0,1]$, alors l'intégrale de Riemann-Stieltjes $\int_0^1 f(x)\,dF(x)$ existe.*

La démonstration de ce théorème n'est pas évidente mais le lecteur intéressé pourra trouver une preuve dans le livre de H. Kestelman, *Riemann-Stieltjes Integration*.