Le théorème fondamental de l'analyse

Dans "Alma Soror"

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 septembre 2006

L'objectif de ce petit exposé est de montrer à quel point le "théorème fondamental du calcul différentiel et intégral" porte un nom à la mesure de son rôle essentiel en analyse : lier le calcul différentiel (celui qui à trait à la *dérivation*, aux *dérivées*, en quelque sorte à la "vitesse de variation" d'un phénomène) et le calcul intégral, souvent présenté en terminale comme le procédé inverse de la dérivation, alors que le processus de *calcul d'aires* en est l'essence première.

1 Calcul différentiel

Dans toute la suite f désignera une fonction *continue*[1] définie sur l'intervalle $[0,1]$ joignant 0 à 1 et associant à chaque nombre réel[2] x de $[0,1]$ un nombre réel noté $f(x)$. Graphiquement, on représente une fonction de ce type comme sur la figure 1.

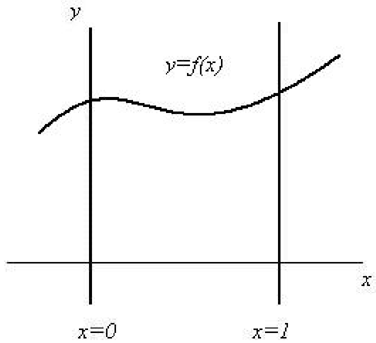

FIG. 1 – Représentation graphique de f

1.1 Dérivées

Fixons un nombre réel x entre 0 et 1, et intéressons-nous à la variation de f autour de ce point x. Plus précisément, fixons un nombre réel h et calculons le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

dont la valeur indique comment la fonction f évolue lorsque l'on effectue un accroissement h sur la variable, relativement à cet accroissement. Ce rapport est d'autant plus grand que f varie "rapidement" entre x et $x+h$. On l'appelle le *taux de variation moyen* de f entre x et $x+h$. Dans le cas où la valeur de ce rapport se stabilise vers une valeur limite lorsque h devient très petit, nous appellerons cette valeur limite le "taux de variation instantané" de f en x, nous la noterons $f'(x)$, et nous dirons que f est *dérivable* en x :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Géométriquement, le rapport (1) est la *pente* de la corde joignant les points $(x, f(x))$ et $(x+h, f(x+h))$ du graphe de f, et le taux de variation instantané de f en x représente, lorsqu'il existe, la pente de la *tangente* au graphe de f au point x. C'est ce qu'illustre la figure 2. La figure 3 montre que le taux de variation instantané d'une fonction continue en un point peut ne pas exister.

Dans le cas où la fonction f est dérivable en tout point x de l'intervalle $[0,1]$, on peut définir sur cet intervalle l'application f' qui associe à chaque réel x de $[0,1]$ le taux de variation instantané de f au point x. On appelle cette application la *dérivée* de f.

[1] Entendons par là que $f(x)$ et $f(y)$ prennent des valeurs proches pour autant que x et y soient suffisamment proches.

[2] Un nombre réel compris entre 0 et 1 possède une écriture décimale $0,XXXXXX\ldots$ où chaque croix représente un chiffre entre 0 et 9.

1.1 Exemple. Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par la formule $f(x) = x^2$ et fixons un réel x entre 0 et 1. Pour un accroissement h, on calcule

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2,$$

et il vient donc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h,$$

quantité qui tend vers le réel $2x$ lorsque h se rapproche de 0. La fonction f est donc dérivable et sa dérivée est la fonction f' définie sur $[0,1]$ par la formule $f'(x) = 2x$.

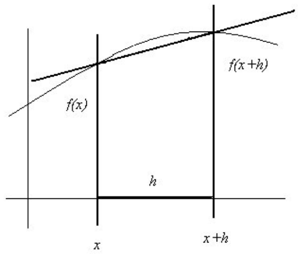

FIG. 2 – La corde tracée en gras “tend” vers la tangente à la courbe représentative de f au point x lorsque h devient petit. La fonction f est *dérivable* en x.

Une question naturelle qui se pose est la suivante : “Toute fonction continue possède-t-elle une dérivée ?”. La réponse est négative. Karl Weierstrass (1815-1897) a même exhibé une fonction continue dont le taux de variation instantané n'existe *en aucun point* ! Un théorème de René Baire (1874-1932) permet de montrer que — en un sens à préciser — parmi les fonctions continues, *rares* sont celles qui sont dérivables, ne fût-ce qu'en un seul point !

1.2 Primitives

Souvent, ce que nous appelons “primitive” dans la suite est nommé “intégrale” dans les cours de terminale. Cette appellation, qui est légitimée dans la suite de ces cours, est à éviter, comme nous allons le voir.

Dans le paragraphe précédent, nous avons défini la dérivée d'une fonction dérivable. Trouver une primitive de la fonction continue f est un procédé inverse de la dérivation : il consiste à rechercher une fonction dérivable F *dont la dérivée est* f. Dans ce cas, nous avons donc

$$F'(x) = f(x)$$

pour chaque nombre réel x de $[0,1]$.

1.2 Exemple. L'exemple 1.1 nous permet d'affirmer que la fonction F définie sur $[0,1]$ par $F(x) = x^2$ est une primitive de la fonction f définie par la formule $f(x) = 2x$, puisque f est la dérivée de F.

A priori, la notion de primitive n'a aucun lien avec quelque calcul d'aire que ce soit. Il s'agit d'une notion purement *différentielle*. Dérivation et primitivation sont simplement des *opérations inverses* du calcul différentiel.

A nouveau, on peut se demander si toute fonction continue admet une primitive. Cette fois, la réponse est affirmative. La plupart du temps, ce résultat est démontré en utilisant le calcul intégral. Cependant, dans un article de

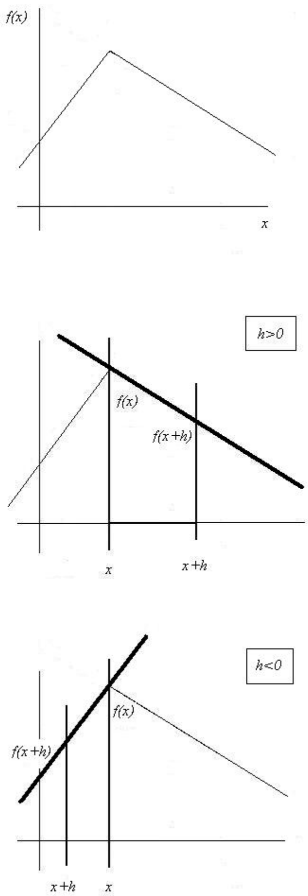

FIG. 3 – Dans le premier cas (correspondant à un accroissement h positif, la corde tracée en gras est indépendante de la longueur de l'accroissement. Dans le cas second cas, correspondant à un accroissement h négatif, la corde est indépendante de la longueur de l'accroissement h mais est différente de la corde obtenue en considérant des accroissements positifs. La fonction f n'est pas dérivable en x. Par contre, on dit que f est dérivable *à droite* (et *à gauche*).

1905, Henri Lebesgue (1875-1941) donne une preuve de ce résultat sans référence au calcul intégral.

Toute fonction continue sur un intervalle est donc la dérivée d'une fonction dérivable sur cet intervalle, et ce résultat est un fait du calcul différentiel.

C'est Gottfried Leibniz (1646-1716) et Isaac Newton (1642-1727) qui, les premiers, ont introduit le calcul différentiel.

2 Calcul intégral

Pour introduire la notion d'intégrale, partons du problème suivant : supposons que f soit positive (la courbe représentative de f est donc située "au dessus" de l'axe horizontal), fixons des nombres réels $a < b$ compris entre 0 et 1, et cherchons à définir l'*aire* de la région comprise entre le graphe de f, l'axe x et dont les points ont des abscisses comprises entre a et b (voir la figure 4).

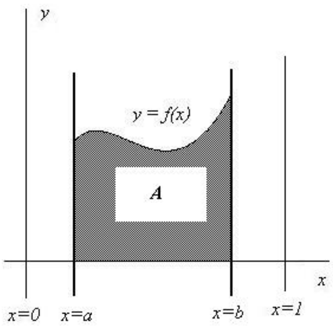

FIG. 4 – Cherchons à définir l'*aire* A de la région grisée.

Pour ce faire, découpons l'intervalle $[a, b]$ (de longueur $b - a$) en n intervalles de même longueur (à savoir $\frac{b-a}{n}$) et construisons sur chacun d'eux un rectangle de hauteur égale à la valeur que prend f sur son extrémité gauche. Si nous numérotons les intervalles de 1 à n en partant de a, l'extrémité gauche du $k^{\text{ième}}$ intervalle est le point

$$x_k = a + (k-1) \times \frac{b-a}{n}.$$

En sommant alors les aires de chacun des rectangles obtenus, on s'attend à disposer d'une approximation A_n de l'aire A d'autant meilleure que n est grand (voir la figure 5) :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \times \frac{b-a}{n}.$$

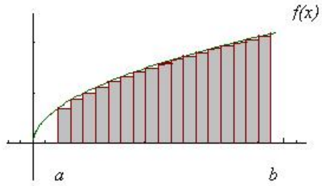

FIG. 5 – Approximation de l'aire A par la somme des aires de chacun des petits rectangles représentés

L'intégrale de a à b de f (notée $\int_a^b f$) représentant l'aire A est alors définie par la limite des approximations A_n de A lorsque n devient très grand :

$$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} A_n,$$

lorsque cette limite existe, auquel cas on dit que la fonction f est *intégrable* sur l'intervalle $[a, b]$.

3 Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Le calcul de l'aire, même de régions simples comme le disque, s'avère très rapidement excessivement fastidieux en utilisant la définition donnée plus haut ! Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, outre le fait qu'il unit ces deux domaines de l'analyse avec une élégance extraordinaire, donne un moyen simple de calcul de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle lorsqu'on connaît une primitive de ladite fonction.

3.1 L'idée : dériver la "fonction-aire"

Supposons que f est une fonction continue positive sur l'intervalle $[0, 1]$ et définissons une nouvelle fonction F sur l'intervalle $[0, 1]$ de la manière suivante : convenons de poser $F(0) = 0$ et associons à chaque nombre réel $x > 0$ l'aire $F(x) = \int_0^x f$ de la région comprise entre le graphe de f, l'axe x et la droite verticale représentant les points d'abscisse x (voir la figure 6).

Intéressons-nous maintenant à la variation de la "fonction aire" F près d'un x fixé dans $[0, 1]$. Pour cela, regardons comment F se comporte lorsque l'on passe de x à $x + h$, où h est un petit accroissement.

Sur la figure 7, on remarque que la variation $F(x+h) - F(x)$ est comparable à l'aire d'un rectangle de base h et de

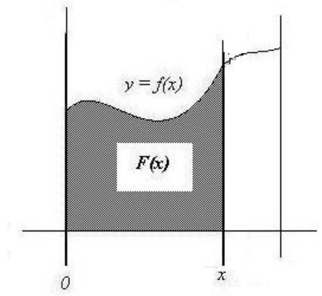

FIG. 6 – Appelons $F(x)$ l'aire de la surface grisée.

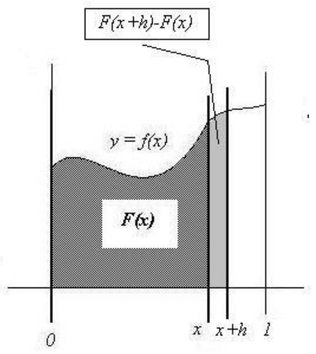

FIG. 7 – Estimation de $F(x+h) - F(x)$.

hauteur $f(x)$ lorsque h est très petit :

$$F(x+h) - F(x) \simeq f(x) \times h.$$

En particulier, nous trouvons

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \simeq f(x),$$

dans la limite où h tend vers zéro. Cela signifie que le *taux de variation instantané de la "fonction aire" F au point x est donné par $f(x)$* ! La fonction f est ainsi la dérivée de la fonction F. En d'autres termes, la fonction F (aussi appelée integrale indéfinie de f) est une *primitive* de f.

Résumons : étant donné une fonction f définie, continue et positive sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction F définie sur $[0,1]$ par la formule intégrale

$$F(x) = \int_0^x f$$

est *une* primitive de f.

Supposons maintenant que l'on dispose d'*une autre* primitive de f. Appelons-là G. On a donc $F'(x) = f(x) = G'(x)$ pour chaque nombre réel x compris entre 0 et 1. Par conséquent, le taux de variation de la fonction $F - G$ en un point x de l'intervalle $[0,1]$ est donné par

$$F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

La fonction $F - G$ possède donc un taux de variation instantané nul en chaque point de $[0,1]$: elle ne peut qu'être constante sur cet intervalle.

Si la fonction $F - G$ est constante, c'est que F et G diffèrent d'une constante C. On peut donc écrire

$$F(x) = C + G(x),$$

quel que soit le réel x compris entre 0 et 1. Pour un tel nombre x, calculons encore $F(x) = F(x) - F(0) = (G(x)+C) - (G(0)+C) = G(x) - G(0)$. Si l'on dispose d'une primitive (quelconque) G de f, on peut donc écrire

$$\int_0^x f = G(x) - G(0).$$

C'est le *théorème fondamental du calcul différentiel et intégral*.

3.1 Théorème. *Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[0,1]$. Si F est une primitive (quelconque) de f sur $[0,1]$, alors*

$$\int_0^1 f = F(1) - F(0).$$

Ainsi, le calcul de l'aire de la région comprise sous le graphe d'une fonction f, dont on a dit qu'il s'avérait vite fastidieux, se ramène à une simple différence dès que l'on dispose d'une primitive de f.

Le théorème que nous venons d'énoncer fait donc bien le lien entre calcul différentiel et intégral puisque les notions d'aire et de dérivée apparaissent maintenant comme inverses — ce qui est à priori surprenant. Cependant, présenter d'abord le calcul intégral comme procédé inverse de la dérivation est prématuré — le sens géométrique de l'intégrale se trouve perdu dans cette approche — et risque de banaliser la portée de ce théorème réellement *fondamental*.

3.2 Exemple. Considérons la fonction $f(x) = 2x$ dont le graphe est représenté à la figure 8. Calculer $\int_0^1 f$ revient à calculer l'aire du triangle délimité à la figure 8 par le graphe de f, l'axe x, l'axe y et la droite verticale $x = 1$. Immédiatement, nous obtenons la valeur de cette aire :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

L'exemple 1.2 nous a montré que la fonction F définie sur $[0,1]$ par $F(x) = x^2$ est une primitive de f. Le théorème fondamental garantit alors que l'intégrale de f entre 0 et 1 est donnée par

$$\int_0^1 f = F(1) - F(0) = 1^2 - 0^2 = 1,$$

quantié qui correspond bien à l'aire du triangle calculée plus haut.

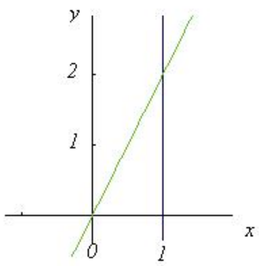

FIG. 8 – Exemple 3.2.

Bien entendu, ce n'est pas pour traiter des cas tels que celui présenté dans l'exemple 3.2 que le théorème fondamental est intéressant, puisqu'ici l'aire du triangle se calculé aisément. L'exemple 3.2 a pour but de confronter notre "nouveau" moyen de calculer des aires (le théorème fondamental) à un exemple connu.

Pour terminer, je tiens à remercier le Professeur Christiane Hauchart pour ses conseils très pertinents.