Une fonction continue sans dérivée

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 octobre 2006

Dans le premier numéro d'"Alma Soror", nous avions développé le raisonnement qui conduisait à lier *dérivation* et *intégration*. Au passage, nous avions mentionné l'existence de fonctions continues dont le *taux de variation instantané* n'existe en aucun point. L'objectif de ce texte est d'éclaircir ce point en montrant comment une telle fonction peut être construite.

1 Dérivées

Rappelons-nous qu'une droite non verticale dans le plan (x, y) est décrite par une équation de la forme

$$y = ax + b,$$

où a désigne la *pente* de cette droite. Le nombre a est aussi obtenu par la formule

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

dès que l'on choisit des points $P = (x_1, y_1)$ et $Q = (x_2, y_2)$ sur la droite en question (voir figure 1).

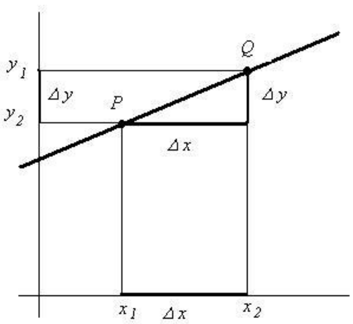

FIG. 1 – Calcul de la pente d'une droite du plan

Cette pente a désigne le rapport entre l'accroissement des ordonnées et celui des abscisses lorsque l'on passe d'un point à un autre sur cette dite droite.

Considérons à présent une fonction continue f associant à chaque nombre réel x compris entre 0 et 1 un nombre réel noté $f(x)$. Le graphe d'une telle fonction est représenté à la figure 2.

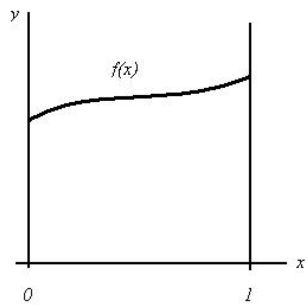

FIG. 2 – Courbe représentative de f

Si nous fixons un nombre réel x entre 0 et 1 et que la courbe représentative de f possède une tangente non verticale en son point d'abscisse x (c.-à-d. une droite qui épouse le comportement de la courbe représentative de f au voisinage de son point d'abscisse x), nous dirons que f est *dérivable* en x, nous noterons $f'(x)$ la pente de ladite tangente et nous l'appellerons le *nombre dérivé* de f au point x. La figure 3 donne l'exemple d'une fonction dérivable au point x, tandis que la figure 4 donne un exemple de fonction non dérivable en x. Dans le cas où la courbe représentative de f possède une tangente verticale en son point d'abscisse x, nous dirons que f est dérivable *au sens large* en x (voir figure 5).

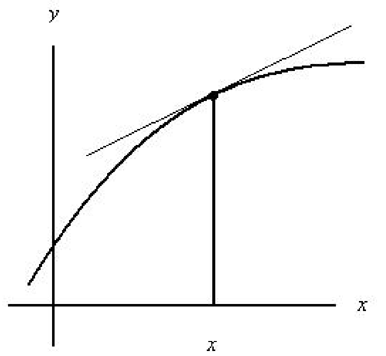

FIG. 3 – La courbe représentative de f possède une tangente non verticale au point x : f est *dérivable* en x

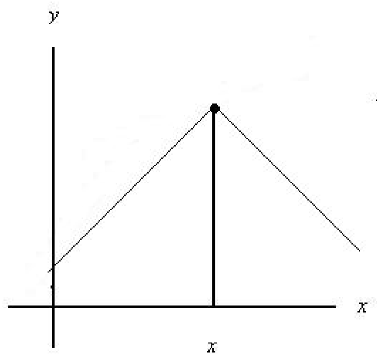

FIG. 4 – La courbe représentative de f n'admet aucune tangente au point x : *f n'est pas dérivable* en x

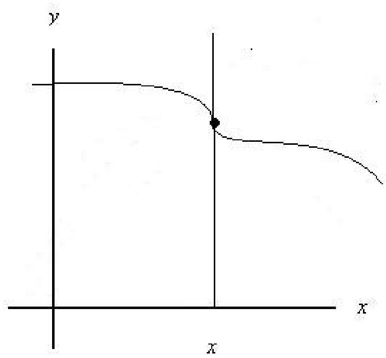

FIG. 5 – La courbe représentative de f admet une tangente verticale au point x : f est *dérivable au sens large* en x