Des équations cubiques aux nombres complexes
Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 novembre 2006

Dans ce troisième numéro d'AlmaSoror, nous partons d'un problème algébrique : étant donnés des nombres (réels) a, b, c et d, avec a non nul, trouver tous les nombres réels x qui vérifient l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{1}$$

Fort de l'expérience acquise en troisième, nous savons que les solutions de l'équation du second degré

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{2}$$

sont données par les formules

$$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{et} \quad \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \tag{3}$$

à condition que le nombre $B^2 - 4AC$ (appelé le discriminant de l'équation (2)) soit positif. La question naturelle est alors la suivante : existe-t-il des formules similaires à (3) qui donnent les solutions de l'équation du troisième degré (1) ?

Nous répondrons pas l'affirmative, en obtenant une formule exprimant une solution de l'équation du troisième degré sous certaines conditions sur les coefficients a, b, c et d. Cependant, alors que dans le cas de l'équation du second degré, la condition $B^2 - 4AC \geqslant 0$ imposée aux coefficients de l'équation (2), est *nécessaire* pour que cette équation possède une solution, il n'en sera rien dans le cas de l'équation du troisième degré. Nous verrons que malgré cela, certaines manipulations purement formelles (non pertinentes, dans le cadre des nombres réels !) mèneront à une solution dans un cas où la condition sur les coefficients a, b, c et d est violée.

1 La formule de Cardan

Cherchons un nombre réel y vérifiant l'équation du troisième degré

$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0, \tag{4}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels et a est non nul (sans quoi il s'agit d'une équation du second degré). Nous avons choisi la lettre y pour désigner l'inconnue pour des raisons de commodité. Ecrivons

$$x = y + \frac{b}{3a}$$

transforme l'équation (4) en

$$a\left(x^3 + px + q\right) = 0 \tag{5}$$

avec

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

La résolution de (4) se ramène donc à la résolution de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

où p et q sont des nombres réels. En posant $x = u + v$,on transforme l'équation en $x^3 + px + q = 0$ en

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0$$

soit

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0$$

Cette équation est sûrement vérifiée si on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^3 + v^3 + q & = & 0 \\ (u + v)(3uv + p) & = & 0 \end{array}\right.$$

Comme il n'y a *a priori* pas de raison que l'on ait $u = -v$, il suffit de trouver u et v tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^3+v^3 &=& -q \\ u^3v^3 &=& -\dfrac{p^3}{27}\end{array}\right.$$

Les nombres réels u^3 et v^3 sont alors des solutions[1] de l'équation

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$$

Si le discriminant de cette équation du second degré est positif, c'est-à-dire si on a

$$q^2+\frac{4p^3}{27}\geqslant 0, \tag{6}$$

alors il vient

$$u^3=\frac{1}{2}\left(-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)$$

et

$$v^3=\frac{1}{2}\left(-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right),$$

c'est-à-dire

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

2 L'idée audacieuse de Bombelli

La formule précédente, dûe à Cardan (1501-1576) et Tartaglia (1499-1557), permet-elle de résoudre l'équation particulière

$$x^3-15x-4=0,$$

dont on connait une solution (à savoir 4) et dont on sait qu'elle a trois solutions, toutes réelles ? La réponse à cette question est négative car la condition (6) est violée :

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-121$$

Exposons alors l'idée de Bombelli (1526-1573), qui, par des manipulations formelles et non justifiées à ce stade, montre que, d'une certaine façon, la formule de Cardan mène a la solution 4 et cela même alors que la condition (6) n'est pas satisfaite !

L'idée est la suivante : alors que la condition $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-121$ nous empêche de parler de la racine carrée $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ (tout carré est positif), nous allons travailler purement formellement avec une "racine carrée de -1". Ecrivons la formule de Cardan pour l'équation $x^3-15x-4=0$ (l'idée est audacieuse) :

$$\begin{array}{rcl} x &=& \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &=& \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}\end{array}$$

Nous allons voir qu'en traitant $\sqrt{-1}$ de manière formelle, on trouve

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}$$

Pour ce faire, il suffit de montrer que l'on a

$$(2+\sqrt{-1})^3=2+11\sqrt{-1}$$

Or on calcule

$$\begin{array}{rcl}(2+\sqrt{-1})^3 &=& 2^3+3\cdot 2^2\cdot\sqrt{-1}-3\cdot 2+\left(\sqrt{-1}\right)^3 \\ &=& 8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1} \\ &=& 2+11\sqrt{-1}\end{array}$$

Rappelons cependant qu'aucune des manipulations précédentes n'est justifiée dans le cadre de la théorie des nombres réels puisqu'il n'existe aucun nombre réel dont le carré vaut -1 !

Un calcul similaire, donnerait

$$\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}$$

On trouve alors

$$\begin{array}{rcl} x &=& \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \\ &=& 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4.\end{array}$$

Hasard ou raison profonde, nous trouvons pour x une solution de l'équation $x^3-15x-4=0$!

3 Hasard ou raison profonde ?

L'histoire a ensuite répondu à la question "Hasard ou raison profonde". En effet, s'il est parfaitement exact qu'il n'existe pas de nombre réel de carré -1, la théorie des nombres complexes montre qu'il est possible d'adjoindre à l'ensemble des nombres réels un symbole i représentant une racine carrée de -1, i.e. vérifiant la relation $i^2=-1$, et de considérer des expressions symboliques du type $a+bi$ où a et b sont des nombres réels, sur lesquelles on introduit des opérations de multiplication et d'addition que l'on peut "deviner" :

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$$

[1]Pour rappel, les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$ ont pour somme S et produit P.

et

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(a'+b'i) &= aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2\\ &= aa'-bb'+(ab'+a'b)i,\end{aligned}$$

tout en conservant l'essentiel des propriétés qu'ont ces opérations de multiplication et d'addition sur les nombres réels. Dans le cadre de cette théorie, les manipulations de la section précédente obtiennent une légitimité.

On peut donc dire que les nombres complexes ont d'abord été utilisée pour obtenir des solutions réelles d'équations simples, et non comme on pourrait le penser afin de "donner un sens à $\sqrt{-1}$". Ceci éclaire, dans un cas particulier, la démarche mathématique qui, constamment, mène à l'introduction de nouveaux "êtres mathématiques", par nécessité *d'abord*, et considérés pour eux-mêmes *ensuite*.