Du théorème de Bolzano au théorème de Brouwer

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 mai 2007

Nous avons parlé, dans le numéro de février, du *théorème de Bolzano* qui affirme qu'étant donné une fonction continue f d'une variable x telle que $f(x)$ soit négative (resp. positive) pour $x = a$ et positive (resp. négative) pour $x = b > a$, cette fonction s'annule nécessairement entre a et b. Géométriquement, cela signifie que toute courbe *continue*[1] reliant deux points situés de part et d'autre d'une droite "coupe" nécessairement cette droite (voir la figure 1).

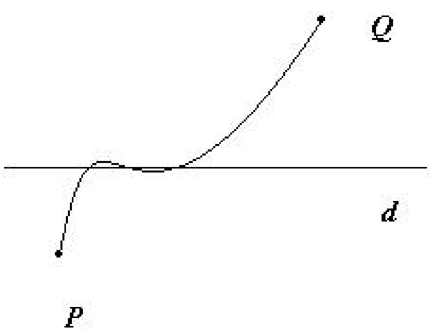

FIG. 1 – Toute courbe *continue* reliant deux points P et Q situés de part et d'autre d'une droite d "coupe" nécessairement cette droite.

Nous allons voir comment ce théorème permet d'obtenir la version uni-dimensionnelle du remarquable *théorème du point fixe de Brouwer*.

Nous accorderons ensuite quelques paragraphes au *théorème du point fixe de Banach* qui fournit d'excellents algorithmes pour résoudre certaines équations.

[1]On entend par "courbe continue" une déformation d'un segment de droite obtenue sans le sectionner.

1 Le théorème de Brouwer en dimension un

Dans la suite, nous considérons des nombres réels $a < b$, le segment $S = [a, b]$ joignant les nombres réels a et b et une fonction F associant à un point x de S un point $F(x)$ du segment S, comme sur la figure 2.

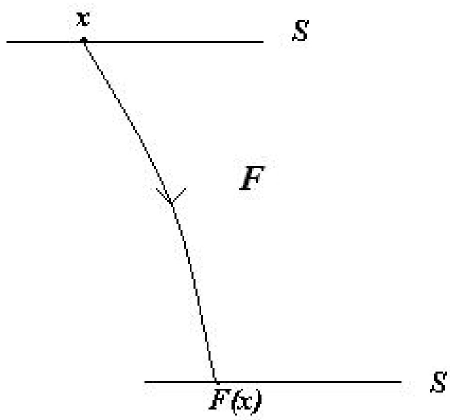

FIG. 2 – L'application F associe à chaque point x de S un point $F(x)$ de S.

On suppose en outre que cette fonction F est continue, c'est-à-dire que si les points $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de S se rapprochent indéfiniment du point x de S, alors les points $F(x_1), F(x_2), F(x_3), \ldots$ se rapprochent indéfiniment de $F(x)$.

Nous allons voir que, sous ses hypothèses, nous pourrons démontrer le *théorème de Brouwer* dans sa version uni-dimensionnelle :

Théorème 1. *Au moins un point du segment S est envoyé sur lui-même par la fonction F. Autrement dit, il existe un x^* de S tel que $F(x^*) = x^*$.*

Pour démontrer ce résultat, nous allons nous servir de l'astuce suivante : trouver un point x^* de S tel que $F(x^*) = x^*$ revient à trouver un point x^* de S tel que

$$F(x^*) - x^* = 0.$$

Définissons alors la fonction f qui associe à chaque point x de $[a,b]$ le nombre réel $f(x) = F(x) - x$. Nous sommes donc ramenés à trouver un point x^* de $[a,b]$ tel que $f(x^*) = 0$.

La fonction f, différence de deux fonctions continues, est elle-même continue. En outre, on voit que

$$f(a) = F(a) - a.$$

Comme $F(a)$ est un point de $S = [a,b]$, $F(a)$ est un nombre réel plus grand que a et on a donc

$$f(a) = F(a) - a \geqslant 0.$$

De la même façon, on a

$$f(b) = F(b) - b,$$

et vu que $F(b)$ est un nombre réel plus petit que b, on trouve $f(b) = F(b) - b \leqslant 0$. La fonction f est donc positive au point a et négative au point b. En particulier, le théorème de Bolzano assure l'existence d'un nombre réel x^* compris entre a et b tel que $f(x^*) = 0$, ce que nous recherchions. Le théorème est donc démontré.

D'un point de vue géométrique, représentons graphiquement la fonction F comme sur la figure 3 et traçons la diagonale Δ composée des points (x,y) tels que $x = y$.

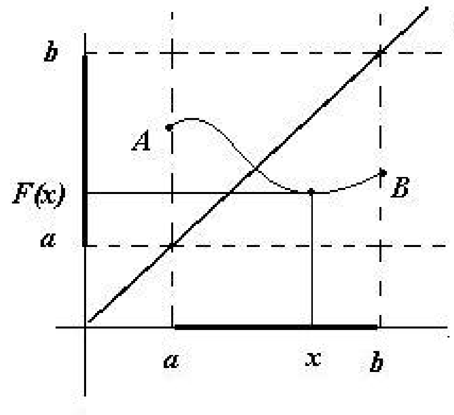

FIG. 3 – Le théorème de Brouwer en dimension un.

La courbe représentative de F est alors une courbe continue reliant les points A et B situés de part et d'autre de la diagonale Δ. Le théorème de Bolzano garantit alors l'existence d'un point d'intersection entre la diagonale et la courbe représentative de F. Ce point $(x^*, F(x^*))$ est alors tel que $x^* = F(x^*)$.

Remarque 2. Dans les conditions précédentes, un point x^* vérifiant $F(x^*) = x^*$ est appelé un *point fixe* de F. Le théorème de Brouwer uni-dimensionnel se reformule alors : toute fonction continue d'un segment de droite dans lui-même possède au moins un point fixe.

2 Le théorème de Brouwer dans le plan et dans l'espace

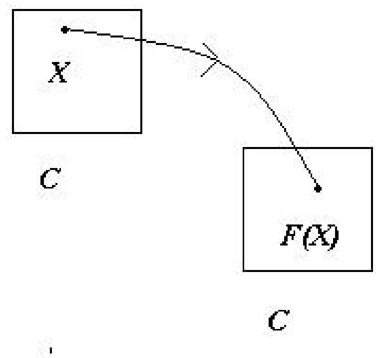

FIG. 4 – Une application d'un carré dans lui-même.

Nous pouvons maintenant nous poser la question suivante : étant donné un carré plein C du plan et une fonction F associant à chaque point X de ce carré un point $F(X)$ de ce même carré, existe-t-il un point X^* de C fixé par F ?

La réponse à cette question est affirmative lorsque F est continue[2] : c'est le théorème de Brouwer en dimension deux.

De la même façon, toute fonction continue d'un cube dans lui-même possède nécessairement un point fixe.

On peut proposer l'interprétation suivante du théorème de Brouwer : secouez une bouteille d'eau et posez-la dans sa position initiale. Au moins une molécule d'eau est à la même place qu'avant la secousse. Une telle interprétation est évidemment plus amusante que correcte — le solide plein mathématiquement continu étant loin de modéliser à merveille un liquide dont les molécules discrètes sont en mouvement permanent.

[2]On dit que F est continue si, lorsque les points $X_1, X_2, X_3, \ldots$ de C s'approchent indéfiniment de X, alors les points $F(X_1), F(X_2), F(X_3), \ldots$ s'approchent indéfiniment de $F(X)$

Le théorème de Brouwer est dû à Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). L.E.J. Brouwer était un mathématicien néérlandais, de l'école *intuitionniste*. En logique intuitionniste, une preuve abstraite d'existence n'est pas considérée comme suffisante : on prouve l'existence d'un objet vérifiant une propriété en l'exhibant et non en démontrant que sa non-existence est contradictoire. Le tiers exclu d'Aristote est rejeté en logique intuitionniste !

Il est amusant de noter que sous la forme présentée plus haut, le théorème Brouwer ne possède aujourd'hui aucune preuve constructive.

Dans le cas particulier où l'application F est contractante, la situation est différente.

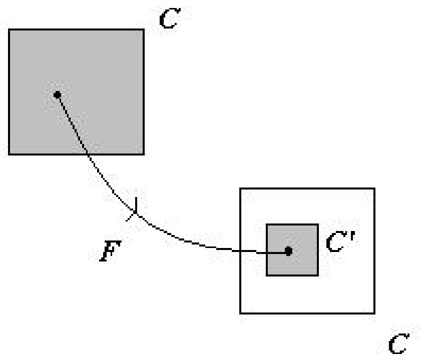

FIG. 5 – Exemple de contraction d'un carré.

3 Le théorème du point fixe de Banach

Dans la section suivante, nous considérons une fonction F du segment $S = [a, b]$ dans lui-même (un raisonnement identique fonctionne en dimension supérieure, pour un carré ou un cube). Nous supposerons en outre que F est *contractante*, c'est-à-dire que F réduit les distances : on demande qu'il existe un nombre $K < 1$ tel que

$$\operatorname{dist}(F(x), F(y)) \leqslant K \operatorname{dist}(x, y),$$

où $\operatorname{dist}(\xi, \eta)$ désigne la distance entre les points ξ et η. On peut montrer que cette condition est toujours vérifiée lorsque f a une dérivée $f'(x)$ en tout point de S et à condition que l'on ait $|f'(x)| \leqslant K$ en tout point de S.

Typiquement, une application contractante envoie S sur un segment plus petit : elle contracte le segment S.

En dimension deux, on a représenté la situation à la figure 6 : F envoie le carré C sur le carré C', qui en est une contraction.

Regardons ce qui se passe alors si on itère F une seconde fois. Graphiquement, le cube C de départ est envoyé sur C' puis sur C''.

On voit que, au fur et à mesure des itérations, la figure obtenue est de plus en plus petite. Il paraît alors naturel de proposer la construction suivante. Choisissons un point x_0 du segment S (ou du carré C) et appelons $x_1 = F(x_0)$ le point sur lequel est envoyé x_0 par l'application F. Itérons l'application F, et appelons $x_2 = F(x_1)$. Continuons ainsi et construisons une suite $x_0, x_1, x_2, \ldots$ appelée suite des itérées de x_0 par f.

On démontre alors que la suite des itérées se rapproche indéfiniment d'un point fixe x^* pour F ! Il est à noter que

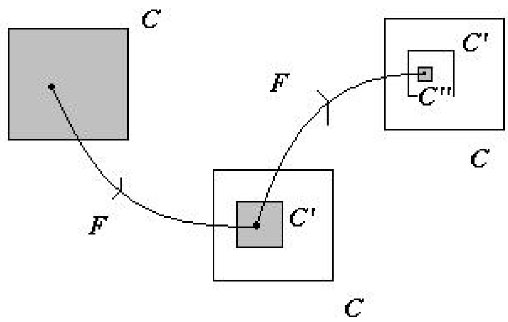

FIG. 6 – Itération de la contraction F.

dans le cas présent, nous avons une construction du point fixe x^*.

Par ailleurs, on peut aussi montrer que le point x^* est le seul point fixe de F.

C'est Stefan Banach (1892-1945) qui démontra ce théorème souvent appelé *théorème du point fixe de Banach.*

Exemple 1. Le petit exemple suivant fournit une belle application du théorème de Banach. Sur une calculatrice, tapez un nombre x_0 au hasard entre -1 et 1, et appuyez ensuite plusieurs fois — en mode radians ! — sur la touche `COS` (c'est-à-dire itérez plusieurs fois la fonction cosinus sur le nombre réel x_0). Vous constatez après quelques itérations une stabilisation vers la valeur

$$x^* = \texttt{0,73908513321516064165531208767...}$$

Ce nombre est l'unique point fixe de la fonction cosinus : $\cos x^* = x^*$, comme la figure 7 le suggère.

Pour voir que le théorème de Banach s'applique dans notre cas, il suffit de remarquer que la dérivée de la fonction cosinus est donnée par $\cos' x = -\sin x$, dont la valeur absolue est plus petite que $K = 0.9 < 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ (voir figure 8). En outre, la fonction cosinus envoie le segment $[-1, 1]$ dans lui-même puisque le cosinus d'un angle est toujours compris entre -1 et 1.

Il est à remarquer que, dans cet exemple, le point x_0 peut aussi être pris hors de l'intervalle $[-1, 1]$ sans que l'itération cesse de fournir des approximations du point fixe x^*.

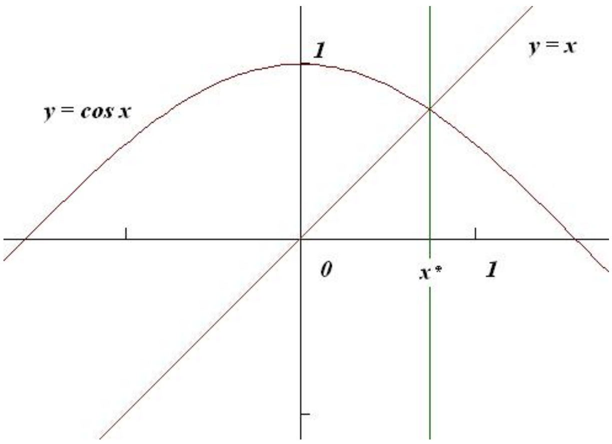

FIG. 7 – Le point fixe x^* de la fonction cosinus.

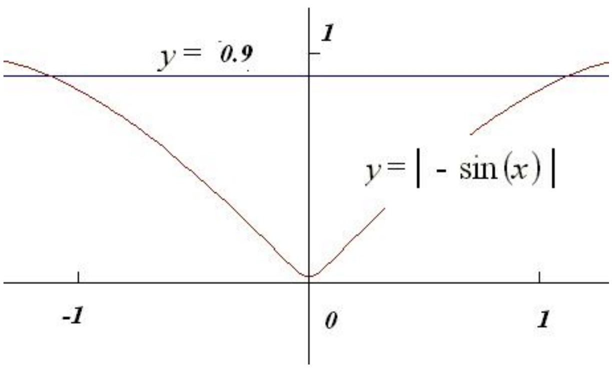

FIG. 8 – La fonction $|\sin x|$ est majorée par 0.9 sur l'intervalle $[-1, 1]$.

4 Applications

La recherche des points fixes d'une fonction continue s'avère avoir un nombre incalculable d'applications aux mathématiques modernes ! Pour illustrer ce propos et conclure de manière plus concrète, imaginons que l'on recherche une solution à l'équation

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

où f est une fonction continue.

Résoudre cette équation revient à trouver un point x pour lequel on a

$$f(x) + x = x,$$

c'est-à-dire un point fixe de la fonction F définie par $F(x) = f(x) + x$.

Si on peut trouver un segment S tel que F envoie S dans lui-même, alors le théorème de Brouwer garantit l'existence d'une solution à l'équation (1).

Si en outre F est une contraction de S, alors le théorème de Banach garantit l'unicité de ce point fixe et une méthode itérative pour obtenir des approximations de la solution.

Exemple 2. Considérons la fonction f définie par la formule

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - x - 1.$$

La fonction $F(x) = f(x) + x$ et représentée à la figure 9.

On voit alors que F envoie le segment $[-1, 0]$ dans lui-même. Le théorème de Brouwer implique alors l'existence d'un nombre réel x^* entre -1 et 0 fixé par F, c'est-à-dire annulant f.

En outre, on peut montrer que F est une contraction de $[-1, 0]$. Partant de $x_0 = 0$ et itérant F, on obtient la suite d'approximations suivantes de x^* :

$$\begin{aligned} x_1 &= \texttt{-1,} \\ x_2 &= \texttt{-0.9000,} \\ x_2 &= \texttt{-0.9109,} \\ x_4 &= \texttt{-0.9096,} \\ x_5 &= \texttt{-0.9098,} \\ x_6 &= \texttt{-0.9098.} \end{aligned}$$

En partant de $x_0 = \texttt{0.6}$ on obtient :

$$\begin{aligned} x_1 &= \texttt{-0.9064,} \\ x_2 &= \texttt{-0.9102,} \\ x_2 &= \texttt{-0.9097,} \\ x_4 &= \texttt{-0.9098,} \\ x_5 &= \texttt{-0.9098.} \end{aligned}$$

Sur la figure 10 représentant la fonction f, on voit que `-0.9098` est bien une excellente approximation de la solution à l'équation $f(x) = 0$.

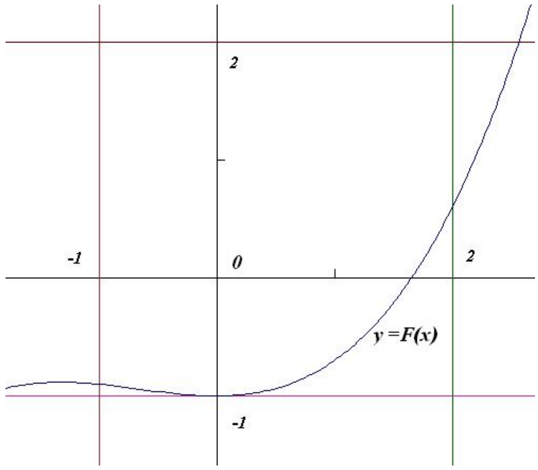

FIG. 9 – Graphe de $F(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - 1$.

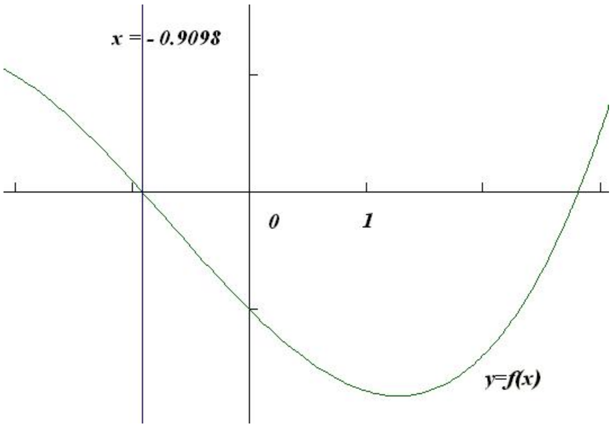

FIG. 10 – Graphe de $f(x)$ et localisation de la solution de $f(x) = 0$.

Exemple 3. Considérons la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule

$$F(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

représentée à la figure 11.

On calcule alors le nombre dérivé de F en un point x de $\mathbb{R}$:

$$F'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

A la figure 12, on voit que cette dérivée est en valeur absolue majorée par $K = 0.75 < 1$.

En outre, F envoie tout intervalle contenant $[0, 1]$ dans lui-même, et le théorème du point fixe de Banach est d'application : partant de n'importe quel nombre réel x_0, la suite des itérées converge vers le point fixe x^* de F dont une valeur approchée est donnée par

$$x^* = 0.6823\ldots$$

Le lecteur pourra effectuer les itérées sur sa calculatrice, et constater la convergence de ces dernières vers x^*.

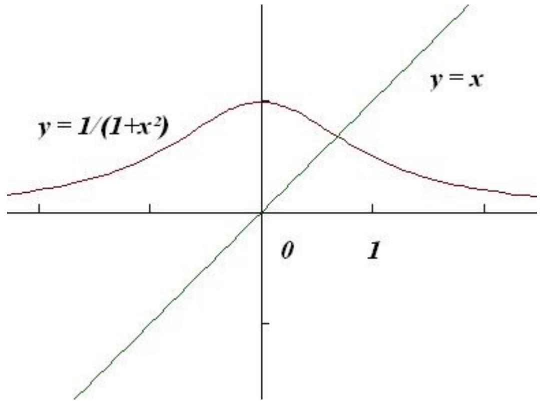

FIG. 11 – Graphe de $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

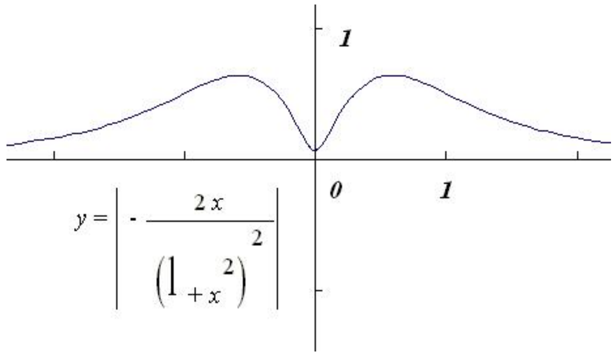

FIG. 12 – Graphe de $|F'(x)| = \left|\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|$.