# Une théorie moderne de l'intégrale

Dans AlmaSoror

Laurent Moonens
Aspirant du F.N.R.S. (Belgique)
moonens@math.ucl.ac.be

Le 20 janvier 2007

Dans ce premier numéro d'AlmaSoror de l'année 2007, nous nous proposons d'expliquer un problème de la théorie de l'intégrale de Riemann (que l'on présente en terminale, voir la section 2 de la page scientifique de septembre 2006) : la nécessité de l'introduction des intégrales dites '*impropres*'. Nous tentons aussi d'inroduire le lecteur à une théorie moderne de l'intégrale qui offre une solution à ce 'problème des intégrales impropres'. Cette théorie moderne, développée dans la seconde moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle par les mathématiciens Jaroslav Kurzweil (né en 1926) et Ralph Henstock (né en 1923), a l'avantage conserver dans sa présentation l'intuition géométrique qui conduit à la définition de l'intégrale de Riemann.

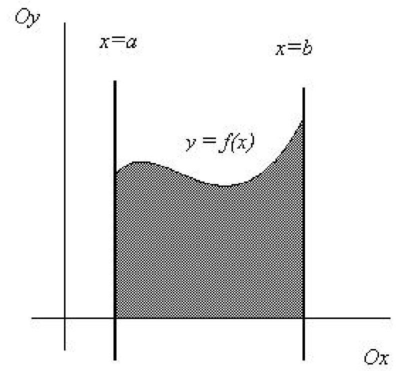


FIG. 1 – L'aire $A(f; a, b)$

## 1 L'intégrale de Riemann et les intégrales impropres

Donnons-nous une fonction positive $f$ définie sur l'intervalle $[a, b]$ joignant $a$ à $b$, associant à chaque nombre réel $x$ de cet intervalle un nombre réel positif noté $f(x)$. On s'intéresse à calculer l'aire $A(f; a, b)$ de la surface délimitée par le graphe de la fonction $f$, l'axe des abscisses $Ox$ et les verticales issues de $a$ et $b$, comme sur la figure 1.

Une manière d'obtenir la valeur de cette aire $A(f; a, b)$ est la suivante. On effectue un découpage de $[a, b]$ en $n$ intervalles de même longueur, $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$,..., $I_n = [a_n, b_n]$. On approche alors l'aire $A(f; a, b)$ par la somme des aires des rectanges de base $I_k$ et de hauteur $f(a_k)$ :

$$A_n(f; a, b) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \times \ell(I_k),$$

où l'on a noté $\ell(I_k)$ la *longueur* de l'intervalle $I_k$. Ce procédé est schématisé à la figure 2.

On obtient alors l'aire $A(f; a, b)$ par la formule

$$A(f; a, b) = \lim_{n\to\infty} A_n(f; a, b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \times \ell(I_k),$$

qui donne la limite des approximations $A_n(f; a, b)$ lorsque le découpage devient de plus en plus fin, lorsque cette limite existe.

Il est à remarquer que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \times \ell(I_k),$$

peut exister même si $f$ ne prend pas que des valeurs positives. On appelle alors cette limite l'*intégrale* de $f$ sur l'intervalle $[a, b]$. Géométriquement, ce nombre représente la différence entre l'aire située *au dessus* de l'axe des abscisses et comprise entre cet axe, le graphe de $f$ et les verticales issues de $a$ et $b$, et l'aire située en dessous de l'axe des abscisses et comprise entre cet axe, le graphe de $f$ et les

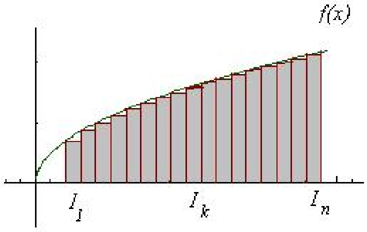


FIG. 2 – L'approximation $A_n(f; a, b)$ de l'aire $A(f; a, b)$

verticales issues de $a$ et $b$. Autrement dit, on compte positivement l'aire située au-dessus de l'axe $Ox$ et négativement l'aire située sous l'axe $Ox$ (voir figure 3). On note

$$\int_a^b f$$

l'intégrale de $f$ sur l'intervalle $[a, b]$.

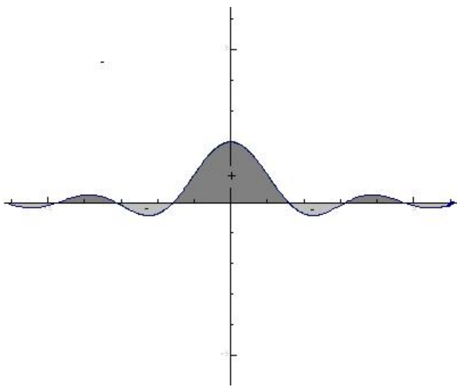

FIG. 3 – L'intégrale d'une fonction non nécessairement positive : une somme algébrique d'aires

## 2 Les intégrales impropres

Prenons le cas de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par les formules $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ si $x$ est non nul (voir figure 4).

Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en $n$ intervalles $I_1 = [0, 1/n], I_2 = [1/n, 2/n], \ldots, I_n = [(n-1)/n, 1]$ de longueur $1/n$. Calculons l'aire du rectangle de base $I_k$ et de hauteur $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$. Pour le rectangle de base $I_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, on

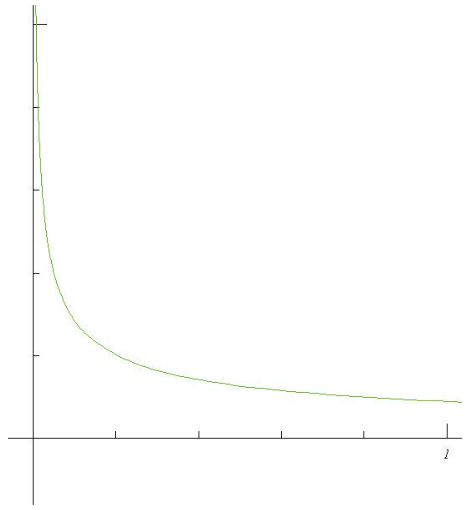


FIG. 4 – La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

trouve $f(0) \times \ell(I_1) = f(0) \times \frac{1}{n} = 0$. Pour le rectangle de base $I_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, on trouve

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \times \ell(I_2) = f\left(\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pour le rectangle de base $I_3 = \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right]$, on trouve

$$f\left(\frac{2}{n}\right) \times \ell(I_3) = f\left(\frac{2}{n}\right) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pour le rectangle de base $I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$, on trouve

$$f\left(\frac{n-1}{n}\right) \times \ell(I_n) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

L'approximation $A_n(f; 0, 1)$ est donnée par la somme de ces aires :

$$A_n(f; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right].$$

Or on peut montrer que le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers l'infini lorsque $n$ augmente : la limite

$$\lim_{n \to \infty} A_n(f; 0, 1)$$

est infinie. On aurait donc tendance à croire que l'aire de la région située sous le graphe de $f$, au-dessus de l'axe des abscisses et comprise entre les verticales issues de 0 et 1 est infinie.

On peut cependant avoir l'idée suivante pour calculer l'aire $A(f; 0, 1)$ (ou montrer qu'elle est effectivement infinie). Pour $\varepsilon$ proche de 0, on calcule l'aire $A(f; \varepsilon, 1)$, comme sur la figure 5.

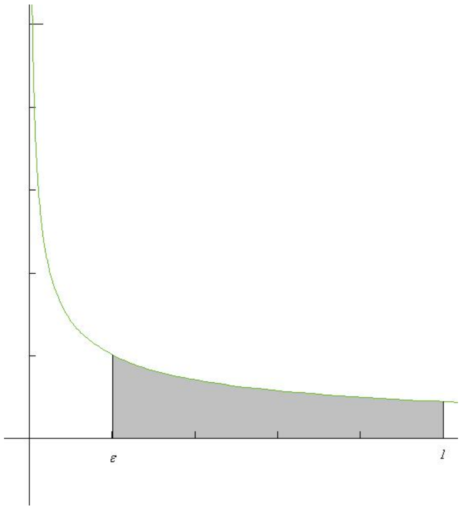

FIG. 5 – L'aire $A(f;\varepsilon,1)$

Ensuite, on prend la limite de cette aire $A(f;\varepsilon,1)$ lorsque $\varepsilon$ se rapproche de 0. La surprise est alors de taille : avec cette méthode, le théorème fondamental de l'analyse (voir l'article de septembre) nous permet de montrer :

$$A(f;\varepsilon,1) = \int_\varepsilon^1 f = 2(1-\sqrt{\varepsilon}),$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A(f;\varepsilon,1) = 2.$$

Si on ne peut pas dire que l'*intégrale* de $f$ sur l'intervalle $[0,1]$ égale 2 (car cette intégrale est infinie), on parle bien d'intégrale *impropre*, définie comme la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f = \lim_{\varepsilon\to 0} A(f;\varepsilon,1) = 2.$$

En conclusion, il semblerait que, dans certains cas, l'approche riemannienne de calcul de l'intégrale (consistant à diviser l'intervalle sur lequel on travaille en un nombre de plus en plus grand d'intervalles *de même longueur*), ne convienne pas pour calculer l'aire $A(f;a,b)$.

# 3 La solution de Kurzweil et Henstock

Comme nous avons vu, dans certains cas, la limite des aires $A_n(f;a,b)$ obtenues en découpant l'intervalle $[a,b]$ en un nombre $(n)$ de plus en plus grand d'intervalles *de même longueur* comme décrit plus haut, s'avère être infinie alors que d'autres méthodes conduisent à associer une valeur finie à l'aire $A(f;a,b)$.

L'idée géniale de Kurzweil et Henstock est de conserver le caractère très intuitif de l'approche riemannienne de l'intégrale, tout en apportant à la définition de Riemann une modification fondamentale : dans les cas semblables à celui présenté dans la section précédente, on force les découpages utilisés pour le calcul des approximations $A_n(f;a,b)$ à être plus fins au voisinage de points singuliers, comme illustré sur la figure 6.

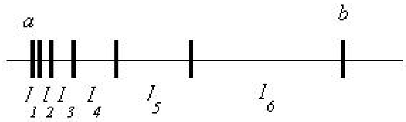


FIG. 6 – Découpage en intervalles de longueurs inégales

Présenter la définition précisément serait un travail fastidieux dans le cadre de ce petit exposé, puisqu'une formulation précise implique l'introduction d'un vocabulaire spécifique. Nous renvoyons, pour les énoncés précis des définitions et théorèmes, à l'excellent ouvrage "Analyse. Fondements, techniques, évolution." du Professeur J. Mawhin (publié aux éditions De Boeck, Bruxelles).

Nous souhaitons par contre insister sur le fait que le problème des intégrales impropres possède une solution très élégante dans le cadre de la théorie de Kurweil et Henstock. En autorisant à forcer les découpages utilisés pour approcher l'aire $A(f;a,b)$ à être plus fins au voisinage de certains points singuliers, on évite de devoir introduire les intégrales impropres.

Il est à noter que la théorie de l'intégrale d'Henri Lebesgue (1875-1941) résoud déja partiellement ce problème. Néanmoins, elle ne présente pas l'avantage pédagogique de l'intégrale de Kurzweil et Henstock, qui continue à privilégier l'approche riemannienne, en utilisant des découpages de l'intervalle sur lequel on travaille et un procédé de passage à la limite sur des découpages de plus en plus fins.

A bien des égards cependant, l'intégrale de Lebesgue se révèle très efficace. Elle présente l'avantage, par exemple, de se généraliser facilement à des espaces abstraits. Néanmoins, elle ne résoud pas complètement le problème des intégrales impropres.

Selon le problème que l'on traite, il convient donc de choisir la théorie de l'intégrale qui est la plus appropriée.

Le professeur J. Kurzweil, à l'origine (comme, indépendamment, R. Henstock) de cette présentation de l'intégrale de Kurzweil-Henstock, vient de fêter ses 80 ans. Il continue à rester très actif en mathématique, en particulier en théorie de l'intégration.